АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ
7В1—7В368

*

U. I. C. C
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 7 1961
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР доктор физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. И. Левин*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *Н. М. Остиану*

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика	
Теория вероятностей	7В1
Математическая статистика	7В26
Теория игр, исследование операций и математическая экономика	7В56
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов	7В110
Численные и графические методы	7В223
Таблицы	7В293
Вычислительные машины и математические приборы	7В300
Применение вычислительных машин	—
Авторский указатель	

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская улица, 14

Технический редактор *Н. Н. Гомза*

Подп. в печать 12/VII-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆ Тираж 1000

Печ. л. 4,0 Усл. печ. л. 6,56 Уч.-изд. л. 10,8 Заказ 1961

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, Москва, Люберцы, Октябрьский пр., 403

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Рефераты 7 В1—7 В368 № 7 Июль 1961 г.

ГПНТБ СО АН СССР Госбиблиотека И/я 4500 584867

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *О. В. Сарманов*

7 В1. О моментах геометрического распределения. Vajani Luigi. Sui momenti di una distribuzione geometrica. «Riv. internaz. sci. econ. e commerc.», 1960, 7, № 8, 758—764, 789, 792 (итал.; рез. англ., нем.)

Устанавливается следующее рекуррентное соотношение для моментов ν_k геометрического распределения $(P\{x=k\}=(1-q)q^k,\ k=0, 1,\ldots)$:

$$\nu_{k+1}=q\frac{d\nu_k}{dq}+\frac{q}{1-q}\nu_k,$$

которое вместе с $\nu_1=q/(1-q)$ позволяет последовательно определять моменты любого порядка.

И. Ф. Красичков

7 В2. Псевдонормальная корреляция и различные ее обобщения. Сарманов О. В. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 2, 299—302

Приводятся выражения для двух тесно связанных между собой семейств плотностей и их характеристики. Так при условии, что $\alpha>-1$, $\lambda^2<1$ плотность распределения второго семейства имеет вид

$$F_{\alpha\lambda}(x, y)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}\dfrac{y^\alpha e^{-y}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}L_k^\alpha(x)L_k^{(\alpha)}(y)\lambda^{2k}\right] & \begin{matrix}0\leqslant x<\infty,\\ \times\ 0\leqslant y<\infty,\end{matrix}\\ F_{\alpha\lambda}=0 \quad \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $L_k^\alpha(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра, ортогональные и нормированные с весом

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}, & 0\leqslant x<\infty,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В заключении отмечается, что корреляции указанного вида и нормальная корреляция исчерпывают класс плотностей, обладающих следующими свойствами: а) собственные функции симметричного ядра $F(x, y)/\sqrt{p(x)p(y)}$ представляют полную систему полиномов, ортогональных с весом $p(x)$ в бесконечном интервале, б) при помощи плотности $F(x, y)$ можно задать непрерывный марковский стационарный процесс с непрерывным временем.

Б. А. Рогозин

7 В3. Квадратичные формы от переменных, подчиненных закону Пуассона и полиномиальному. Whittle P. Quadratic forms: in Poisson and multinomial variables. «J. Austral. Math. Soc.», 1960, **1**, № 2, 233—240 (англ.)

Доказываются две теоремы:

1. Пусть n_j $(j=1, 2,\ldots, m)$ — последовательность независимых величин, подчиненных закону Пуассона со средним $E(n_j)=\lambda_j$, $\mathbf{H}=(h_{jk})$ — положительно определенная матрица и $\Delta_j=n_j-\lambda_j$. Тогда

$$P(\Delta'\mathbf{H}\Delta\leqslant S)>\prod_1^m\left[\frac{e^{-S\mid(24\lambda_j g)}}{1+(S\mid\lambda_j g^{1/2})^{1/2}}\right]\cdot P(\delta'\mathbf{H}\delta\leqslant\mu S),$$

при условии, что $mh/4\leqslant S\leqslant g\min_j\lambda_j$, где h и g — наибольшее собственное значение $\mathbf{H}$ и наименьшее собственное значение $\mathbf{G}=(h_{jk}\sqrt{\lambda_j\lambda_k})$ соответственно

$$\mu=[1-(mh/4S)^{1/2}]^2,$$

и δ — случайный нормальный вектор со средней $E(\Delta)$ и матрицей ковариации $E(\Delta\Delta')$.

II. Пусть n_j — последовательность величин, подчиненных полиномиальному закону со средней $E(n_j)=Np_j$, $\sum p_j=1$; $\Delta=n_j-Np_j$. Тогда

$$P(\Delta'\mathbf{H}\Delta\leqslant S)>\frac{e^{mS/(8Ng\min p_j)}}{\Pi_j[1+(S/Ngp_i)^{1/2}]^{1/2}}P(\delta'\mathbf{H}\delta\leqslant\mu S),$$

при условии, что $mh/4\leqslant S\leqslant Ng\min p_j$ (обозначения те же, что в теореме 1, но здесь $G=(Nh_{jk}\sqrt{P_iP_k})$.

М. К. Камалов

7 В4. Вероятность одновременного наблюдения событий, наступающих независимо друг от друга в некотором интервале времени. Oleszkiewicz M. Prawdopodobieństwo jednoczesnego trwania zjawisk powstających niezależnie od siebie w pewnym okresie czasu. «Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. 1. Prace mat.», 1960, 4, 1—7 (польск.; рез. русск., англ.)

При помощи геометрических рассуждений вычислена вероятность того, что три события, наступающие независимо друг от друга в случайный момент из про-

межутка длиной t, каждое из которых имеет длительность жизни t_0 ($t_0<t$), будут иметь хотя бы один совместный момент жизни. S. Zubrzycki

7 В5. Об одном арифметическом тождестве. Debreu Gerard. On «An identity in arithmetic». «Proc. Amer. Math. Soc.», 1960, **11**, №2, 220—221 (англ.)

Рассматривается бесконечная серия независимых испытаний с набором $N=\{A_1,\ldots,A_n\}$ возможных исходов, вероятности которых соответственно есть $u_1,\ldots,u_n$. Пусть $M\subset N$ и $A_i\in M$. $R(i,M)$ — совокупность всех перестановок $(A_1,\ldots,A_n)$, в которых элемент A_i стоит впереди остальных элементов, принадлежащих M. С помощью вероятностных рассуждений автор получает следующее тождество для $u_1,\ldots,u_n$:

$$u_i/\sum_{j\in M}u_j=\left(\prod_{j=1}^{n}u_j\right)\sum_{(r)\in R(i,M)}\prod_{k=1}\left(\sum_{j=kr}^{n}u_j\right)^{-},$$

где суммирование в правой части распространено на все перестановки $r\in R(i,M)$ и j_r обозначает номер элемента, стоящего на j-ом месте в этой перестановке. Г. А. Власюк

7 В6. Заметка о нормальном приближении к сумме независимых случайных величин. Ikeda Sadao. A note on the normal approximation to the sum of independent random variables. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 2, 121—130 (англ.)

Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин с конечными третьими абсолютными моментами, причем

$$M\xi_i=0,\ M\xi_i^2=\sigma_i^2,\ M|\xi_i|^3=\beta_i^3,\ i=1,2,\ldots$$

Обозначая

$$\sigma_{(n)}^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2,\ \beta_{(n)}^3=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^3,\ \rho_{(n)}=\beta_{(n)}/\sigma_{(n)}$$

и

$$f_{(n)}(t)=Me^{i\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sigma_{(n)}^2}t},$$

автор получает следующее неравенство

$$|f_{(n)}(t)-e^{-t^2/2}|\leqslant c\rho_{(n)}^3|t|^3\exp\{(-1/2+1/p)t^2\}$$

при

$$|t|\leqslant\frac{1}{pc\rho_{(n)}^3}$$

для

$$p>\max\left(2,\frac{6}{5}\frac{b_{(n)}}{\rho_{(n)}^2}\right),$$

где c является постоянной, и

$$b_{(n)}=\frac{\max(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}{\beta_{(p)}}.$$

Приводится формулировка соответствующей леммы в случае равных компонент и таблицы для определения постоянной в неравенствах для характеристических функций. В качестве примера упомянем одно неравенство для случая равных компонент

$$|f_{(n)}(t)-e^{-t^2/2}|\leqslant 0{,}36010\frac{\rho^3}{\sqrt{n}}|t|^3e^{-t^2/4}$$

для

$$t\leqslant\frac{\sqrt{n}}{1{,}44040\rho^3},$$

где

$$\rho^3=\frac{\beta_1^3}{\sigma_1^3}.$$

Эти оценки используются для определения постоянной c_1 в неравенстве

$$\max_x\left|P\left\{\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sigma_1\sqrt{n}}<x\right\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy\right|\leqslant\frac{c_1\rho^3}{\sqrt{n}}.$$

В общем случае получается постоянная c_1, которая больше известных уже в литературе (Takano K., Kōkyuroku of Inst. Math. Stat., 1950, 6), но при условии, что $\rho_3\geqslant m>1$, для некоторых m получаются постоянные e_1, которые меньше известных в настоящее время. Б. А. Рогозин

7 В7. О центральной предельной теореме для суммы случайного числа слагаемых. Rényi A. On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. «Acta math. Acad. scient. hung.», 1960, **11**, № 1-2, 97—102 (англ.; рез. русск.)

Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть ξ_n ($n=1,2,\ldots$) — независимые и одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Пусть

$$\eta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}}.$$

Если ν_n ($n=1,2,\ldots$) образуют последовательность случайных величин, принимающих лишь положительные целые значения, такую, что ν_n/n стремится по вероятности к λ, где λ — положительная случайная величина с дискретным распределением, тогда

$$\lim_{n\to\infty}P(\eta_{\nu_n}<x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

При доказательстве используется метод Дёблина.

Резюме автора

7 В8. О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах. Клосс Б. М. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, **4**, № 3, 255—290 (рез. англ.)

Изучается предельное распределение для последовательности произведений независимых случайных величин, принимающих значения из бикомпактной топологической группы G и описывается класс возможных предельных распределений. Если ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины из G, μ_1 и μ_2 — их распределения, то композиция $\mu=\mu_1\mu_2$ задается формулой

$$\mu_1\mu_2(E)=\int_G\mu_1(Ex^{-1})\,d\mu_2(x).$$

Совокупность $S(G)$ вероятностных мер на G образует полугруппу относительно композиции; каждому элементу $S(G)$ отвечает функционал на непрерывных функциях на G; с помощью этого соответствия в $S(G)$ вводится топология, в которой она оказывается бикомпактной хаусдорфовой полугруппой. Доказывается, что предельными элементами для последовательности композиций одинаково распределенных величин могут являться только идемпотенты $S(G)$ (т. е. меры μ, для которых $\mu\mu=\mu$); они оказываются мерами Хара на бикомпактных подгруппах в G. Для произвольной последовательности $\mu,\mu^2,\ldots$ сходимости может и не быть, однако всегда существует элемент x из G такой, что последовательность $\mu x^{-1},\mu^2x^{-2},\ldots$ сходится к некоторому пределу. В случае произвольной последовательности $\xi_1,\xi_2,\ldots$ независимых случайных величин всегда найдутся элементы $a_1,a_2,\ldots$ такие, что последовательность $\eta_n=\xi_1\xi_2\ldots\xi_na_n$ будет иметь предельное распре-

деление. Трудности, возникающие из-за несепарабельности, преодолеваются с помощью аппроксимации ее сепарабельными факторгруппами. В последней части работы исследуются величины, принимающие значения из бикомпактной полугруппы. И. В. Гирсанов

7 В9. Усиленная устойчивость сумм и неограниченно делимые распределения. Прохоров Ю. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1958, 3, № 2, 153—163 (рез. англ.)

Приводятся новые достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых симметрично распределенных случайных величин и $|\xi_n| < n$ при всех n (показывается несущественность этих ограничений). Обозначим через P_{ξ_n} распределение вероятностей величины ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$P_r = 2^{-r} \sum_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} P_{\xi_n}, \quad r = 0, 1, \ldots,$$

тогда для выполнимости усиленного закона больших чисел достаточно условие

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{\tau_r \geqslant \varepsilon\} < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0,$$

где τ_r имеет безгранично делимое распределение с характеристической функцией

$$f(t; \tau_r) = \exp 2^r \int \left(e^{itu/2^r} - 1\right) P_r(du).$$

Используя для оценки вероятностей $P\{\tau_r \geqslant \varepsilon\}$ моментные неравенства Чебышева, автор получает достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел, выраженные в терминах «усредненных моментов»

$$2^{-r} B_{2s,r} = 2^{-r} \sum_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} M\xi_n^{2s}, \quad r \geqslant 0,$$

например, условие

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_{6,r} + 15B_{4,r} \cdot B_{2,r} + 15B_{2,r}^3}{2^{6r}} < \infty.$$

Применение неравенства Чебышева с показательными функциями приводит к следующему достаточному условию для сходимости ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{\tau_2 \geqslant \varepsilon\} \quad \text{при любом } \varepsilon$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \exp\left(-2^r \varepsilon h_r(\varepsilon)\right) < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0,$$

где $h_r(\varepsilon)$ — корень уравнения $\varepsilon = \int u \operatorname{sh} uh\, P_r(du)$. Сходимость ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{\tau_r \geqslant \varepsilon\}$$

при любом $\varepsilon > 0$ представляет собой необходимое условие для выполнимости усиленного закона больших чисел для всех последовательностей с заданными P_r, $i = 0, \ldots$ В применении к специальному случаю величин ξ_n с распределением

$$P(\xi_n = \pm a_n) = \frac{p_n}{2}, \quad P\{\xi_n = 0\} = 1 - p_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

при весьма естественных ограничениях приводится необходимое и достаточное условие применимости усиленного закона больших чисел.

Примечание референта. Отметим одну опечатку, несколько затрудняющую понимание текста: в лемме 3.3 в случае б) выражение для $g(l)$ должно иметь вид $(0, \ldots 1, j_{2l_0-1}, \ldots, j_{2m-2})$. Б. А. Рогозин

7 В10. О законе повторного логарифма. Петров В. В. «Успехи матем. наук», 1960, 15, № 2, 189—194

Устанавливается, что последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с конечными абсолютными моментами порядка $2 + \delta$, $\delta > 0$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M(\xi_1 - M\xi_i)^2/n > 0$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} M|\xi_i - M\xi_i|^{2+\delta}/n < \infty,$$

подчиняется закону повторного логарифма.

Б. А. Рогозин

7 В11. Тауберова теорема и ее вероятностная интерпретация. Spitzer Frank. A Tauberian theorem and its probability interpretation. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, 94, № 1, 150—169 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$F(x) = \int_0^{\infty} K(x - y)\, dF(y), \tag{1}$$

где $K(x)$ — функция распределения случайной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$. Если допускать в качестве решения лишь монотонно неубывающие функции, определенные при $0 \leqslant x < \infty$, непрерывные справа, с $F(0) > 0$, то устанавливается, что уравнение имеет единственное решение, определенное с точностью до постоянного множителя. Итерации уравнения

$$F_0(x) = 1, \quad F_{n+1}(x) = \int_0^{\infty} K(x - y)\, dF_n(y), \quad x \geqslant 0,$$

сходятся к решению $G(x)$

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} (n\pi)^{\frac{1}{2}} F_n(x)$$

и если $K(x)$ абсолютно непрерывна и $K'(x) = k(x)$, то $G(x)$ абсолютно непрерывна и является решением уравнения (1). При этом

$$\lim_{x\to\infty} [G(x + h) - G(x)] = h \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sigma},$$

когда $K(x)$ — нерешетчатая функция распределения, и

$\lim_{n\to\infty} G(n + 1) - G(n) = 2^{\frac{1}{2}}/\sigma$ в решетчатом случае.

Доказательство основано на следующих результатах для случайной величины z — первой положительной величины в последовательности $s_0 = 0$, $s_1 = \zeta_1$, $s_2 = \zeta_1 + \zeta_2, \ldots$ $\ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ldots$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины: найдено выражение для математического ожидания z

$$M(z) = M\xi_1 \exp\left\{\sum_1^{\infty} \frac{1}{k} P\{s_k < 0\}\right\},$$

если

$$M\xi_1 > 0, \text{ и } M(z) = \frac{(M\xi_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \exp\left\{\sum_1^\infty \frac{1}{k}\left[\frac{1}{2} - P(s_k > 0)\right]\right\},$$

если $M\xi_1 = 0$ и $0 < M\xi_1^2 < \infty$; получена локальная форма закона арксинуса. Применение предыдущих результатов привело к установлению следующих тауберовых теорем: Если $G(x)$ имеет преобразование Лапласа

$$1 + \int_{0+}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dG(x) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + u^2} \log[1 - \Phi(u)]du\right\},$$

где $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dK(x)$ и $K(x)$ есть непрерывная функция распределения со свойством $K(+x) = 1 - K(-x)$, тогда $\lim_{x\to\infty}[G(x+h) - G(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}h$, аналогичные результаты имеют место в решетчатом случае. В заключение приводятся некоторые результаты, связанные с теорией восстановления: обозначая через $M_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n} s_k$, $\mu = M\xi_1$ и $\sigma^2 = D\xi_1$, автор получает в предположении нерешетчатости следующие соотношения для $\mu > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_1\{x < M_n \leqslant x + h\} = \frac{h}{\mu},$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_2[x < S_n \leqslant x + h;\ M_{n-1} < S_n] = \frac{h}{\mu}\exp\left\{-\sum \frac{1}{k} P_2[s_k \leqslant 0]\right\},$$

и, наконец, для $\mu = 0$ и конечной дисперсии

$$\lim \sum_{n=0}^{\infty} P_2[x < S_n \leqslant x + h;\ M_{n-1} < S_n] = \frac{2^{1,2}h}{c\sigma}.$$

Примечание референта. Необходимо заметить, что приведенное в работе соотношение (4. 5) ошибочно, в чем легко убедиться подстановкой $t = 0$, приведем исправленное выражение

$$\sum_1^\infty t^n \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, d_0 F_n(x) = \frac{1}{1 - E[t^N e^{-\lambda z}]} - \frac{1}{\sum_0^\infty F_n(0)\, t^n}.$$

Несмотря на это, все последующее остается в силе, так как автор пользуется лишь соотношением, получающимся из (4. 5) при $t = 1$, а при этом значении приведенная формула и (4. 5) совпадают. Б. А. Рогозин

7 В12. Слабые и полные определения случайных функций. Применение к лапласовым случайным процессам. Lévy Paul. Dépinitions faibles et définitions complèmes des fonctions aléatoires. Application aux processus stochastiques laplaciens. «Bull. sci. math.», 1960, **84**, № 2, 47—64 (франц.)

Слабым названо определение случайного процесса заданием конечномерных функций распределения. Процесс $x^*(t)$ имеет то же слабое определение, что и $x(t)$, если существует случайное множество E такое, что $P\{E \ni t\} = 0$ для любого t и $x(t) = x^*(t)$ для $t \overline{\in} E$. На E $x(t)$ и $x^*(t)$ могут принимать какие угодно значения. Приведены конкретные примеры таких множеств E. Указаны очевидные недостатки слабого определения. Сделана попытка конструктивно определить гауссовский случайный процесс. Два процесса с одним и тем же «сильным» определением совпадают тождественно, а не только с вероятностью 1. Р. Ф. Матвеев

7 В13. Математические ожидания функционалов от одного стохастического процесса. Nelson Edward, Varberg Dale. Expectations of functionals on a stochastic process. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 574—578 (англ.)

Пусть $N(t)$ — число скачков траектории сепарабельного пуассоновского процесса с параметром a за время от 0 до t. Рассматривается стохастический процесс $x(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, где $x(t)$ есть сумма случайного числа $N(t)$ независимых случайных величин, принимающих значения 1 и -1 с вероятностью 1/2. Основным результатом работы является следующая теорема: Пусть

$$\Psi_n = \int_0^\infty e^{-st} E\left\{\exp\left[-\int_0^t V(x(\tau))\, d\tau\right], x(t) = n\right\} dt,$$

где V — неотрицательная функция и для любого функционала K от процесса $x(t)$ $E\{K(x), x(t) = n\} = E\{K(x)\chi(x)\}$, где $\chi(x) = 1$, если $x(t) = n$, и $\chi(x) = 0$ в противном случае. Тогда Ψ_n удовлетворяет системе разностных уравнений:

$$\Psi_{n+1} - \frac{2}{a}(s + a + uV_n)\Psi_n + \Psi_{n-1} = -\frac{2}{a}\delta_{n,0},$$

где $V_n = V(n)$, $\delta_{n,0}$ — символ Кронекера. С помощью этой теоремы получено явное выражение для

$$E\left\{\exp[-u\int_0^t [x(\tau)]^2 d\tau], x(t) = n\right\},$$

а также для преобразования Лапласа (по t) вероятности $P\{-p < x(\tau) < q$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t\}$, где p и q — положительные целые числа. В. Н. Тутубалин

7 В14. Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов. Золотарев В. М. «Теория вероятностей и ее применения», 1958, **3**, № 2, 197—200 (рез. англ.)

Для произвольного безгранично делимого процесса $\xi(t)$ и любого неотрицательного безгранично делимого процесса $\eta(t)$, не зависимого от $\xi(t)$, устанавливается, что $\eta(t) = \xi(\eta(t))$ является безгранично делимым процессом, при этом

$$Me^{i\lambda\eta(t)} = \exp\left\{t\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\lambda x} - 1)\, dH_\eta(x)\right.,$$

где $H_\eta(x)$ — монотонная неубывающая функция при $x < 0$ и $x > 0$, $H_\eta(-\infty) = H_\eta(\infty) = 0$ и

$$\int_{-1}^{1} |H_\eta(x)|\, dx < \infty.$$

Для $H_\eta(x)$ приводится выражение через характеристики исходных процессов. Аналогичные результаты получаются для процесса $h(t) = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\eta(t)}$, где $\eta(t)$ — неотрицательный целочисленный процесс безгранично делимый и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых в некотором смысле почти одинаково распределенных случайных величин. Б. А. Рогозин

7 В15. Немарковские процессы с полугрупповым свойством. Feller William. Non—Markovian processes with the semigroup property. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1252—1253 (англ.)

Строится простой пример немарковской случайной последовательности, двумерные распределения которой удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена. На

основе этого примера конструируется процесс с непрерывным временем, обладающий аналогичным свойством. И. В. Гирсанов

7 В16. О вероятностях крайних значений сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний. Волков И. С. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 3, 338—352 (рез. англ.)

Пусть на состояниях $E_1,\ldots,E_m$ конечной однородной цепи Маркова задана целочисленная неотрицательная функция $f(E_k)$. Назовем весом цикла $E_{i_1},\ldots,E_{i_l}$ $(p_{i_1 i_2}\cdot p_{i_2 i_3}\cdots p_{i_l i_1}>0)$ число $\frac{1}{l}[f(E_{i_1})+\ldots+f(E_{i_l})]$ и обозначим через δ и Δ наименьший и наибольший веса циклов таких, что E_{i_1} достижимо из E_q и E_j достижимо из E_{i_1} и состоящих из разных состояний. Обозначим через $e(k)$ состояние цепи в момент k. Исследуется асимптотическое поведение вероятности

$$P_{qj}(n,s)=P\left\{\sum_0^n f(e(k))=s,\ e(n)=E_j \mid e(0)=E_q\right\}$$

при $n\to\infty$ и $s=\delta n+\gamma$ (либо $\Delta n+\gamma$), где γ — произвольное фиксированное число. Множество $\{\beta\}$ всех цепочек, начинающихся из E_q, кончающихся в E_j, не содержащих циклов минимального веса и вдоль которых $\sum f(E_i)=l\delta+\gamma$, где l — длина цепочки, конечно при любом γ (оно может быть и пустым). Вероятность $P_{qj}(n,n\delta+\gamma)$ распадается на сумму слагаемых $P_\beta^{(n)}$, соответствующих элементам этого множества (любая цепочка, для которой $\sum f(E_i)=n\delta+\gamma$, $e(n)=E_j$ путем вычеркивания минимальных циклов однозначно сводится к одному из элементов β). Каждому β соответствуют целые числа L, I, J (I — целое кратное J) и постоянные Λ и R такие, что если $n\not\equiv L\pmod J$, то $P_\beta^{(n)}=0$, и если $n\equiv L+\nu\pmod I$, где $\nu\equiv 0\pmod J$, то отношение $P_\beta^{(n)}/n^R\Lambda^n$ стремится при $n\to\infty$ к конечному положительному пределу (зависящему от ν). Кроме того, $P_{qj}(n,n\delta+\gamma)$ в точности равно конечной сумме членов вида $a_k\ n^{R_k}/\Lambda_k^n$, где a_k, R_k и Λ_k находятся методом производящих функций. Аналогичные результаты имеют место и для $P_{qj}(n,n\Delta+\gamma)$. А. А. Юшкевич

7 В17. Гиперстоуновские пространства, связанные с марковскими цепями. Kendall David G. Hyperstonian spaces associated with Markov chains. «Proc. London Math. Soc.», 1960, **10**, № 37, 67—87 (англ.)

Изучаются топологические свойства границы, построенной по стохастической матрице P. Аналогично тому, как это сделано Феллером (РЖМат, 1959, 1758), строятся структуры из подмножеств фазового пространства и из инвариантных векторов, являющихся гармоническими функциями процесса. Между этими структурами устанавливается соответствие, и с помощью некоторой теоретико-множественной конструкции вводится граница. Автор рассматривает на ней топологию, в которой граница оказывается вполне несвязным бикомпактом. Подробно изучается атомистическая часть границы (множество изолированных точек). Все пространство в целом оказывается пространством Стона; дополнительное исследование мер на нем позволяет отнести его к гиперстоуновскому типу. И. В. Гирсанов

7В18. Исследование непрерывности случайных функций Маркова. Fuchs Aimé. Etude de la continuité des fonctions aléatoires de Markov. «Bull. Soc. math. France», 1960, **88**, № 2, 157—216 (франц.)

В первых двух главах изучаются различные определения непрерывности случайных функций: непрерывность в точке, непрерывность на отрезке, непрерывность по вероятности и непрерывность почти наверное. Приводятся условия, обеспечивающие непрерывность разных видов для случайных функций общего вида и отдельно для марковских случайных функций. В гл. 3 для марковских процессов, непрерывных почти наверное на отрезке, приводятся условия, обеспечивающие существование коэффициентов локальной диффузии и локального сноса и выполнение стохастического дифференциального уравнения Ито. Изучается модуль непрерывности для диффузионного процесса, удовлетворяющего стохастическому уравнению Ито. В гл. 4 изучаются свойства непрерывности операторов

$$T_{t,\tau}\ \text{и}\ \overline{T}_{t,\tau}:\ T_{t,\tau}\varphi(E)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(dx)\,F(t,x,\tau,E)$$

и

$$\overline{T}_{t,\tau}\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,F(t,x,\tau,d\lambda),$$

где $F(t,x,\tau,E)$ есть переходная функция марковского процесса, и первый из операторов действует в пространстве аддитивных функций множества $\varphi(E)$ с ограниченной вариацией, а второй — в пространстве измеримых ограниченных функций $\varphi(x)$. В. А. Волконский

7 В19. Условия эргодичности для возвратного диффузионного процесса. Motoo Minoru. Ergodic property of recurrent diffusion processes. Watanabe Hisao, «J. Math. Soc. Japan», 1958, **10**, № 3, 272—286 (англ.)

Изучаются условия эргодичности для одномерных регулярных марковских процессов с непрерывными траекториями, определенных на отрезке $[a,b]$ (который может быть и неограниченным). Пусть $X_t^{(x)}(\omega)$ — траектория процесса, выходящая в момент $t=0$ из точки x. Процесс называется возвратным, если для любых $x, y\in[a,b]$ $P_x\{X_t^{(x)}(\omega)=Y$ для некоторого $t\}=1$. Предполагается, что каноническая шкала процесса равна x; через $m(dx)$ обозначается его каноническая мера. Основная теорема работы состоит в том, что для возвратного процесса $X_t^{(x)}(\omega)$ и m-интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T f\left(X_t^{(x)}(\omega)\right)dt}{\int_0^T g\left(X_t^{(x)}(\omega)\right)dt}=\frac{\int_a^b f(x)\,dm(x)}{\int_a^b g(x)\,dm(x)}$$

с вероятностью 1,

если $\int_a^b g(x)\,dm(x)\neq 0$. Для доказательства для произвольной точки $y\neq x$ строится последовательность $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{2k-1},\tau_{2k},\ldots$ моментов первого достижения y, первого после τ_1 возвращения в x и т. д. В силу строгой марковости процесса величины

$$y_k(\omega)=\int_{\tau_{2k-1}}^{\tau_{2k}} f\left(x_t^{(x)}(\omega)\right)dt$$

образуют последовательность независимых случайных величин с одинаковым распределением, к которым применим усиленный закон больших чисел.

Аналогичные теоремы были ранее известны для счетных цепей. При этом случаю положительных состояний соответствует условие $m[a,b]<\infty$; нулевому классу

отвечает случай $m[a, b] = \infty$. Доказывается, что в первом случае имеет место обычная эргодическая теорема:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\left(x_t^{(x)}(\omega)\right) dt = \frac{1}{m[a,b]}\int_a^b f(x)\, dm(x).$$

Примечание референта. Аналогичные результаты были недавно получены Хасьминским для широкого класса марковских процессов. И. В. Гирсанов

7 В20. Разрывные процессы Маркова. Moyal J. E. Discontinuous Markoff processes. «Acta math.», 1957, 98, № 3-4, 221—264 (англ.)

Рассматриваются процессы Маркова, у которых имеется не более счетного числа скачков, а времена скачков образуют вполне упорядоченное множество. Такие процессы автор характеризует двумя функциями: $\chi_0(x, t \mid x_0, t_0)$ — вероятностью того, что процесс, находясь в момент t_0 в состоянии x_0, перейдет в момент t в одно из состояний множества x непрерывным образом, и $\psi(S \mid x_0, t_0)$ — вероятность того, что, находясь в момент t_0 в состоянии x_0, процесс окажется непосредственно после ближайшего скачка в одной из фаз множества S; под фазой процесса понимается пара $x(t), t$, где $x(t)$ — состояние процесса в момент t. Если определены функции χ_0 и ψ, то переходная функция процесса $\chi(x, t \mid x_0, t_0)$ должна удовлетворять уравнению

$$\chi(x, t \mid x_0, t_0) = \chi_0(x, t \mid x_0, t_0) + \int \chi(x, t \mid \xi, \tau)\psi(d\xi, d\tau) \mid x_0, t_0).$$

Основная часть работы посвящена исследованию вопроса о существовании и единственности решения этого интегрального уравнения. Если $\chi_n(x, t \mid x_0, t_0)$ определяются из рекуррентного соотношения:

$$\chi_n(x, t \mid x_0, t_0) = \int \chi_{n-1}(x, t \mid \xi, \tau)\psi(d\xi, d\tau \mid x_0, t_0)$$

и $\chi_R = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n$, то χ_R будет минимальным положительным решением уравнения. Условия единственности решения уравнения, являющегося вероятностной переходной функцией, заключаются в том, чтобы $\chi_R(\mathfrak{X}, t \mid x_0, t_0) = 1$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех состояний процесса. Описание всех решений в случае $\chi_R(\mathfrak{X}, t \mid x_0, t_0) < 1$ не дается. Исследуются некоторые эргодические свойства процесса. В заключении приводятся примеры разрывных марковских процессов.

А. В. Скороход

7 В21. Естественная топология и эксцессивные функции, связанные с марковским процессом. Дынкин Е. Б. «Докл. АН СССР», 1959, 127, № 1, 17—19

Естественной топологией в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ некоторого марковского процесса X_t называется топология, задаваемая всевозможными суммами таких множеств $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B}$, что из какой бы точки x этого множества ни вышла система, она не может сразу достичь его дополнения, т. е. для $x \in \mathfrak{G}$ должно быть $P_x\{$существует $\delta > 0$ такое, что $x_t \in \mathfrak{G}$ для всех $0 \leqslant t < \delta\} = 1$. Формулируются теоремы: 1) о том, что замыканием множества Γ в естественной топологии является множество таких точек, из которых множество Γ мгновенно достигается, 2) о том, что эксцессивные функции, впервые рассмотренные Хантом (РЖМат, 1959, 9295) непрерывны в естественной топологии. В. А. Волконский

7 В22. Марковские операторы и связанные с ними полугруппы. Getoor R. K. Markov operators and their associated semi-groups. «Pacif. J. Math.», 1959, 9, № 2, 449—472 (англ.)

Работа является продолжением статьи автора (РЖМат, 1960, 7945). Рассматривается полугруппа операторов T_t, связанных с марковским процессом с траекториями x_t:

$$T_t f(x) = M_x e^{-\int_0^t V(x_s)ds} I_G f(x_t),$$

где $V(x)$ — неотрицательная функция на фазовом пространстве, G — некоторая область фазового пространства, а I_G — характеристическая функция события $\{x_s \in G, 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Полугруппа рассматривается на пространстве L^2. В предположении абсолютной непрерывности переходных функций процесса относительно некоторой фиксированной меры $m(dx)$ и некоторых других условий регулярности доказывается строгая непрерывность полугруппы T_t и выводится вид ее инфинитезимального оператора. Доказывается абсолютная непрерывность мер $K_{x,t}(E) = T_t\chi_E(x)$, где $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E фазового пространства, относительно меры $m(dx)$. Доказываются теоремы о спектральном разложении операторов T_t. В частности для случая, когда переходная плотность исходного процесса интегрируема с квадратом по мере $m(dx)$, а λ_j и $\varphi_j(x)$ есть соответственно собственные числа и собственные функции инфинитезимального оператора исходного процесса, доказывается, что

$$K(t, x, y) = \sum_j e^{-\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(y) \text{ для любого } x$$

почти наверное относительно $m(dy)$. В. А. Волконский

7 В23. О некоторых преобразованиях марковских процессов. Дынкин Е. Б. «Докл. АН СССР», 1960, 133, № 2, 269—272

Неотрицательная функция $\alpha_t^s(\omega)$ $(0 \leqslant s \leqslant t < Z)$ называется мультипликативным функционалом от марковского процесса $X = (x_t, Z, M_t^s, P_{s,x})$, если значение $\alpha_t^s(\omega)$ определяется по поведению процесса на отрезке $[s, t]$ и

$$\alpha_t^s \alpha_u^t = \alpha_u^s \ (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u < Z(\omega)).$$

При условиях $M_{s,x}\alpha_t^s \leqslant 1$ и $P_{s,x}\{Z > s\} = 1$ формула

$$\widetilde{P}(s, x; t, \Gamma) = M_{s,x}\left[\chi_\Gamma(x_t)\alpha_t^s\right] \qquad (1)$$

(χ_Γ — характеристическая функция множества Γ) определяет некоторую переходную функцию. Если можно подобрать такую функцию $\xi_t(\omega)$ $(0 \leqslant t < Z)$, что А) $\alpha_t^s \xi_t \leqslant \xi_s$ при $s \leqslant t$, Б) $\lim_{t \downarrow s} \alpha_t^s \xi_t = \alpha_s^s \xi_s$, В) $\xi_t(\omega)$ определяется поведением процесса, начиная с момента t, Г) $M_{s,x}\xi_s = 1$ при всех s, x, то процесс $\widetilde{X}$ с переходной функцией (1) можно построить так, чтобы его траектории получались путем обрыва траекторий процесса X. Дается конструкция процесса $\widetilde{X}$, который называется при этом (α_t^s, ξ_t)-подпроцессом процесса X. Если X и α_t^s однородны, то (α_t^s, ξ_t)-подпроцесс процесса X тоже однороден. (α_t^s, ξ_t)-подпроцессы включают ряд важных частных случаев. 1) При $\xi_t = 1$ получаются подпроцессы, подробно рассмотренные в монографии Е. Б. Дынкина «Основания теории марковских процессов» (М., Физматгиз, 1959). Здесь $\alpha_t^s(\omega)$ представляет собой условную вероятность процессу $\widetilde{X}$ не оборваться на отрезке $[s, t]$, когда известно поведение X на $[s, t]$. 2) Если $\alpha_t^s \xi_t = \alpha_s^s \xi_s$ и $P_{s,x}\{\alpha_s^s = 1\} = 1$, то траектории $\widetilde{X}$ совпа-

дают с траекториями X, а $\xi_s(\omega)$ представляет плотность меры $\widetilde{P}_{s,x}$ относительно $P_{s,x}$. Этот случай содержит, в частности, преобразование винеровского процесса, приводящее к появлению сноса, изучавшееся Ю. В. Прохоровым (РЖМат, 1957, 8789). 3) Если процесс X однороден и $f(x)$ — эксцессивная в смысле Ханта функция, то формула

$$\widetilde{P}(t, x, \Gamma) = \frac{1}{f(x)} \int_{\Gamma} f(y)\, P(t, x, dy) \qquad (2)$$

определяет новую переходную функцию $\widetilde{P}$. Если $f(x)$ представима в виде $f(x) = M_x\eta$, где η — так называемая эксцессивная относительно X случайная величина, то процесс $\widetilde{X}$ с переходной функцией (2) можно построить, как однородный $\left(\alpha_t^s, \xi_t\right)$-подпроцесс, полагая

$$\alpha_t^0 = \frac{f(x_t)}{f(x_0)}, \quad \xi_0 = \frac{\eta}{f(x_0)}.$$

Однако не всякая эксцессивная функция представима в виде математического ожидания эксцессивной случайной величины. Последняя конструкция обобщается также на неоднородный случай.

Замеченные опечатки: 1) На стр. 272, 5 строка сверху, вместо $M_{s,x}\alpha_t^s = 1$ должно быть $M_{s,x}\alpha_t^s \leqslant 1$. 2) На стр. 272, 5 строка сверху, во втором интеграле вместо du должно быть dx_u. 3) На стр. 275, 20 строка сверху, дважды вместо φ должно быть α. А. А. Юшкевич

7 В24. О среднем числе пересечений некоторого уровня выборочными функциями вероятностного процесса. Иванов В. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 3, 352—357 (рез. англ.)

Дается строгое обоснование известной формулы Райса — Бунимовича для математического ожидания числа N_u пересечений фиксированного уровня u стационарным вероятностным процессом ξ_t на отрезке $[0, T]$:

$$MN_u = T \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, p_{\xi_t, \xi_t'}(u, y)\, dy,$$

где $p_{\alpha,\beta}(x, y)$ — плотность распределения вектора (α, β). Эта формула выводится при широких условиях регулярности, накладываемых на плотности

$$p_{\xi_t, \xi_t'}(x, y) \text{ и } p_{\xi_t', \xi_t''}(x, y),$$

где ξ_t', ξ_t'' — производные процесса ξ_t. Приводится также следующее выражение для старших моментов величины N_u:

$$MN_u^k = \lim_{\Delta u \to 0} MN_u^k(\Delta u), \text{ где } N_u(\Delta u) =$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2\Delta u}\, \varphi_{\Delta u}(\xi_t - u)\, |\xi_t'|\, dt, \quad \varphi_{\Delta u}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \Delta u, \\ 1, & |x| \leqslant \Delta u. \end{cases}$$

Это выражение может быть использовано для вывода выражений для MN_u^k через плотность $p_{\xi_t, \xi_t'}(x, y)$, аналогичных формуле Райса — Бунимовича. Однако эти выражения в статье не приводятся. В. А. Волконский

7 В25. Случайные стационарные обратимые функции. Blanc—Lapierre André. Les fonctions aléatoires stationnaires réversibles. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 19, 1957—1959 (франц.)

Случайная действительная функция $x(t)$ ($Mx(t) \equiv 0$) класса $\Phi(\infty)$ (введенного в известной книге Форте и автора) со стационарными моментами всех порядков названа обратимой, если

$$M\{x(h_1) \ldots x(h_k)\} = M\{x(-h_1) \ldots x(-h_k)\}$$

для любых $\{h_i\}$ и k. Найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $x(t)$ оставалась обратимой после прохождения через любой линейный фильтр с действительной функцией отклика.

Р. Ф. Матвеев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *Н. В. Смирнов*

7 В26. Композиция гистограмм. Zoroa P. Convolucion de histogramas. «Trab. estadíst.», 1958, **9**, № 3, 159—182 (исп.; рез. англ.)

С помощью некоторых вспомогательных функций автор дает формулы для композиции распределений, определяемых гистограммами. Эти формулы обобщаются и на многомерный случай. По резюме автора

7 В27. Теория выбора для оценок, основанных на меньшем числе индивидуумов, чем входит в выборку. Durbin J. Sampling theory for estimates based on fewer individuals than the number selected. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 113—119 (англ.; рез. франц.)

Пусть n — натуральное число, V — случайная выборка из совокупности A; $A_0 \subset A$; требуется оценить среднее арифметическое μ значений $x(a)$ некоторой функции x на A_0, т. е. для $a \in A_0$. Можно оценить μ средним арифметическим m значений $x(a)$ для $a \in V_0 = V \cap A_0$, но стандартные формулы для дисперсии неприменимы, так как количество элементов V_0, которые используются для оценки, есть случайная величина. В статье приведены приближенные формулы для дисперсии такой оценки для m и оценки этой дисперсии для расслоенного выбора и многоступенчатого выбора. V. Fabian

7 В28. О расслоенном случайном выборе при наличии нескольких признаков. Ghosh S. P. A note on stratified random sampling with multiple characters. «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1958, 8, № 30—31, 81—90 (англ.)

Пусть производится выборка объема n из конечной генеральной совокупности, разбитой на L групп. Каждому элементу совокупности соответствует p признаков $x_1, \ldots, x_p$. Ставится задача нахождения чисел n_h, $\sum_{h=1}^{L} n_h = n$, таких, что для выборки, включающей n_h элементов из h-й группы, минимизируется обобщенная дисперсия

$$V = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{2p} \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2}, \ldots, \sigma_p^2 \end{vmatrix}$$

линейных оценок для средних значений признаков, имеющих вид:

$$\bar{x}_i = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_{ih},$$

где $\bar{x}_{ih}$ — выборочное среднее i-го признака в h-й группе; W_h — некоторые веса

$$\sigma_i^2 = D(\bar{x}_i); \quad \sigma_{ij} = \operatorname{cov}(\bar{x}_i, \bar{x}_j).$$

Задача решается с помощью множителей Лагранжа, и в результате для n_h получается некоторое уравнение, которое, однако, алгебраического решения не имеет. Для определения n_h предлагается итерационный процесс, первый шаг которого заключается в том, что в σ_i^2 подставляются значения n_h, вычисленные согласно методу Неймана, когда минимизируется не обобщенная дисперсия,

а дисперсия i-го признака. Приводится пример, иллюстрирующий метод итераций. Предлагаемый оптимальный критерий сравнивается с несколькими другими.

Ю. А. Веретенников

7 В29. Почти несмещенные оценки отношения, основанные на оценках по пересекающимся подвыборкам. Murthy M. N., Nanjamma N. S. Almost unbiased ratio estimates based on interpenetrating sub-sample estimates. Sankhya, Indian J. Statist.», 1959, **21**, № 4, 381—392 (англ.)

Пусть на элементах конечной генеральной совокупности заданы два численных признака x и y, и пусть X и Y — суммы значений этих признаков по всем элементам совокупности. Ставится задача выборочной оценки отношения $R = X/Y$. Для этой цели производится n выборок с возвращением (так что выборки могут иметь общие элементы); по i-й выборке ($i = 1, \ldots, n$) строят несмещенные оценки X_i и Y_i для X и Y и на основе этих оценок строятся статистики.

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i}, \quad R_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}.$$

Приближенно при малых $\frac{X_i - X}{X}$, $\frac{Y_i - Y}{Y}$ исследуя смещения и средние квадратические отклонения этих оценок, авторы приходят к выводу о том, что R_1 в качестве оценки для R лучше R_2. Далее авторы, комбинируя оценки типа R_1 и R_2, получают новые, еще более точные оценки.

И. Ф. Красичков

7 В30. О задаче сравнения списков по выборкам. Deming W. Edwards, Glasser Gerald J. On the problem of matching lists by samples. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1959, **54**, № 286, 403—415 (англ.)

Пусть имеются два списка имен, в каждом из которых одно и то же имя встречается по одному разу. Пусть M и N — соответственно числа имен в списках и D — число совпадающих имен в обоих списках. Производятся выборки объемов m и n из этих списков и пусть d — количество совпадающих имен в этих выборках. Рассматривается задача о получении оценок для D, p и P, где $p = \frac{D}{M}$, $P = \frac{D}{N}$. Несмещенными оценками для D, p и P являются

$$\hat{D} = N\hat{P}, \quad \hat{p} = \frac{N}{n}\frac{d}{m}, \quad \hat{P} = \frac{M}{m}\frac{d}{n}.$$

Приводится выражение для распределения d при фиксировании M, N и Dm и n, а также в двух предельных случаях:

1) $M, N, m, n \to \infty$; $D, \frac{m}{M}, \frac{n}{N}$ фиксированы;

2) $M, N, m, n, D \to \infty$; $\frac{mnD}{MN} = \lambda$ фиксировано.

Приводятся также оценки для Ed, Ed^2, $D\hat{p}$. Рассматривается обобщение проблемы на случай установления количества общих имен в L списках. Приводятся результаты, аналогичные вышеуказанным. Исследуется вопрос об установлении оптимальных объемов выборок m и n с целью минимизации затрат. Доказывается, что если стоимость выбора одного имени из первого и второго списков есть соответственно c_1 и c_2, то оптимум достигается при $mc_1 = nc_2$. Исследуется также случай, когда в каждом из списков некоторые имена встречаются несколько раз.

Б. В. Финкельштейн

7 В31. Оптимальная стратегия и другие проблемы вероятностного выбора. Hájek Jaroslav. Optimum strategy and other problems in probability sampling. «Casop. pěstov. mat.», 1959, **84**, № 4, 387—423 (англ.; рез. чешск., русск.)

Работа посвящена нахождению оптимальной стратегии для широкого класса допустимых выборочных планов, оценок, функций стоимости при байесовском подходе. В первой части вводятся основные понятия. Генеральная совокупность S состоит из N элементов $1, \ldots, N$. Из S с вероятностью $P(s)$ извлекается выборка $s \subset S$. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_N$ — значения некоторого признака, отвечающие элементам $1, \ldots, N$. Требуется оценить величину $Y = \sum_{i=1}^N y_i$ по выборке s. Для этой цели используется линейная оценка

$$\hat{Y} = \sum_{i \in s} y_i \omega_i(s), \qquad (1)$$

где $\omega_i(s)$ ($i \in s$, $s \subset S$) — произвольные веса. Формулируется теорема: Если для значений $z_1, \ldots, z_N$ уравнение $\sum_{i \in s} z_i \omega_i(s) = \sum_{i=1}^N z_i$ удовлетворяется с вероятностью 1, то среднеквадратичная ошибка оценки (1) есть:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{y_i}{z_i} - \frac{y_j}{z_j}\right)^2 z_i z_j (M\omega_i + M\omega_j - 1 - M\omega_i\omega_j).$$

Рассмотрен общий метод улучшения оценок, основанный на достаточных статистиках. Результаты уточняются для некоторых частных схем выбора. Во второй части находится оптимальный способ выбора для случая независимых случайных величин y_i с известными математическими ожиданиями μ_1 и дисперсиями σ_i^2, если стоимость выбора определяется как $\sum_{i=s}^N c_i \pi_i$, где π_i — вероятность получения выборки s, содержащей элемент i. Показано применение полученных результатов. В третьей части работы определяется оптимальная стратегия для случая, когда значения y_i можно считать реализацией случайной последовательности, имеющей стационарную и выпуклую функцию корреляции и стационарные коэффициенты вариации.

В. И. Бабкин

7 В32. Дисперсия выборочной медианы в случае распределения Коши. Rider Paul R. Variance of the median of samples from a Cauchy distribution. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 290, 322—323 (англ.)

Находятся точные значения дисперсии выборочной медианы для малых выборок и сравниваются с асимптотическими значениями.

По резюме автора

7 В33. Процентные точки распределений с известными кумулянтами. Fisher Ronald A., Cornish E. A. The percentile points of distributions having known cumulants. «Technometrics», 1960, **2**, № 2, 209—225 (англ.)

Авторы указывают асимптотическое разложение некоторых распределений, выражая любые процентные точки рассматриваемых распределений через известные кумулянты. Дана общая формула разложения с шестью членами, основанными на использовании восьмой кумулянты. Приведены численные таблицы, дающие коэффициенты всех членов разложения для десяти выбранных уровней значимости от 0,5 до 0,0005, а также таблицы значений первых пяти полиномов Эрмита, таблицы и алгебраические формы разложения для критериев χ^2, t, z для тех же уровней.

В. И. Бабкин

7 В34. Моменты порядковых статистик из нормальной совокупности. Bose R. C., Gupta Shanti S. Moments of order statistics from a normal population. «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 433—440 (англ.)

Дается метод вычисления моментов порядковых статистик для выборок из нормальных совокупностей. Если совокупность нормальна $N(0, 1)$, то t-й момент

k-й порядковой статистики для выборки объема n может быть выражен через младшие моменты и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{t+1}(x)\, e^{-\frac{1}{2}(t+1)x^2}\, du,$$

где

$$P_{t+1}(x) = k\binom{n}{k}\frac{d^t}{d\varphi^t}\left[\Phi^{k-1}(1-\Phi)^{n-k}\right]$$

— многочлен относительно нормальной функции распределения $\Phi(x)$. Приводятся таблицы точных моментов для $t=3,4$ в случае $n \leqslant 5$ и $n \leqslant 6$ соответственно. Таблицы для $t=1$ и 2 были даны ранее (см. Godwin H. J., Ann. Math. Statistics, 1949, **20**, 279—285; Jones H. L., Ann. Math. Statistics, 1948, **19**, 270—273). E. Csáki

7 В35. Регрессионный анализ двойных последовательностей. Cox D. R. The regression analysis of binary sequences. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 2, 215—232, Discuss., 232—242 (англ.)

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — последовательность взаимно независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения 1 и 0 с вероятностями θ_i и $1-\theta_i$ соответственно ($i=1,2,\ldots,n$). Рассматривается логистический закон зависимости θ_i от известных констант x_i:

$$\theta_i = e^{\alpha+\beta x_i}/(1+e^{\alpha+\beta x_i}).$$

Пусть $X=\sum_i x_i Y_i$, $Y=\sum_i Y_i$ и $P\{X_\beta = x\}$ — вероятность того, что $X=x$ при фиксированных значениях β и Y. Найдены выражения для указанной вероятности и производящих функций ее моментов и кумулянт. С их помощью получаются разложения по степеням β м. о. и дисперсии величин X_β и Y_y. Сравниваются различные методы нахождения оценок для параметра β по наблюденным значениям. Автор обобщает исследование на случай, когда имеются две независимые переменные регрессии, в каждом испытании, т. е. когда

$$P(Y_i=1) = e^{\alpha+\beta x_i+\gamma u_i}/(1+e^{\alpha+\beta x_i+\gamma u_i}).$$

Рассматривается также случай, когда Y_i связаны простой стационарной цепью Маркова с вероятностями перехода от 1 к 1 равной $e^{\alpha+\beta}/(1+e^{\alpha+\beta})$, и от 0 к 1, $e^{\alpha}/(1+e^{\alpha})$. Для оценки параметра β рекомендуется здесь использовать статистику W — числа переходов от 0 к 1 и от 1 к 0. Для получения асимптотического распределения W можно при этом использовать результаты, полученные Вальдом и Вольфовицем (Wald A., Wolfowitz, J., Ann. Math. Statistics, 1940, **11**, 147—162). В работе рассматривается случай, когда $P(Y_i=1)$ зависит от числа появлений этого события в предыдущих испытаниях.

Б. В. Финкельштейн

7 В36. Оценки по методу наименьших квадратов и по методу максимума правдоподобия. Berkson Joseph. Estimation by least squares and by maximum likelihood. «Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley — Los Angeles», 1956, 1—11 (англ.)

В обзорном стиле обсуждаются классы оценок, полученных по методу максимального правдоподобия, по методу наименьших квадратов и выясняется их относительное преимущество. В. С. Королюк

7 В37. Использование выборочных квазиразмахов при оценке генерального стандартного отклонения. Harter H. Leon. The use of sample quasi-ranges in estimating population standard deviation. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 980—999 (англ.)

Рассматривается применение квазиразмахов для оценки генерального стандартного отклонения в случае нормального, прямоугольного и показательного распределений. Приводятся таблицы для математических ожиданий и дисперсий квазиразмахов и для эффективности оценки в случае нормальной совокупности. Протабулированы наиболее эффективные несмещенные оценки, основанные на одном квазиразмахе, на линейной комбинации двух смежных и двух не слишком далеких друг от друга квазиразмахах. Вычисляется их эффективность. В случае прямоугольного распределения приводится таблица для построения эффективной оценки генерального стандартного отклонения на основе размаха выборки. Также протабулировано смещение, проистекающее из-за предположения нормальности в случае прямоугольного и показательного распределений. Таблицы распространяются на объем выборок $\leqslant 100$. E. Csáki

7 В38. Об оценке информации. Blyth Colin R. Note on estimating information. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 71—79 (англ.)

Для энтропии $H=-\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i$ дискретного распределения с конечным числом значений строятся статистические оценки по результатам n наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (x_i — число значений, соответствующих вероятности p_i; $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$). В качестве оценки рассматривается полином степени $r \leqslant n$ относительно x_i, полученный из разложения $H=H(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$. Полученные оценки сравниваются асимптотически с оценками по максимуму правдоподобия и с некоторыми минимаксными оценками. Рассмотрен также случай, когда число k неизвестно. В. С. Королюк

7 В39. О комбинации независимых критериев. Lipták Tamás. On the combination of independent tests. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1958 (1959), **3**, № 3-4, 171—197 (англ.; рез. венг., русск.)

В теории Неймана — Пирсона критерием для проверки сложной гипотезы $H_0: \theta \in \Omega_0$ против альтернативы $H_1: \theta \in \Omega_1$ ($\Omega_0 \cap \Omega_1 \neq \varnothing$) является некоторое подмножество C пространства выборок (объем выборки фиксирован). Объемом критерия C называется число

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Omega_0} P\{X \in C \mid \theta\},$$

здесь X обозначает выборку. Обозначим через C_α какой-либо критерий, соответствующий объему α. Автор называет семейство критериев $\{C\}$ тестом, если выполняются следующие естественные условия: 1) каждому объему α соответствует $C_\alpha \in \{C\}$; 2) если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2}$; 3) $\bigcup_{\alpha' < \alpha} C_{\alpha'} = C_\alpha$. Скользящий уровень теста $\{C_\beta\}$ представляет функцию на пространстве выборок: $L(x) = \inf_\alpha \{\alpha : x \in C_\alpha\}$. Из определения скользящего уровня вытекает, что если верна нулевая гипотеза, т. е. $\theta \in \Omega_0$, то функция распределения $L(x)$ удовлетворяет условию $P_\theta\{L(x) < t\} \leqslant t$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Если же $\theta \in \Omega$ и каждый из критериев, входящих в тест, является несмещенным, то

$$P_{\theta_0}\{L(x) < t\} \leqslant P_{\theta_1}\{L(x) < t\}$$

для всех $\theta_0 \in \Omega_0$ и $\theta_1 \in \Omega_1$. Таким образом проверку гипотезы можно провести сравнением эмпирических скользящих уровней, которые можно построить по заданному априорно тесту и результатам выборок. В статье рассматривается совокупность связанных экспериментов, т. е. моделей вышеприведенного типа, которые связаны между собой тем, что нулевые гипотезы могут иметь место только одновременно для всех экспериментов. Рассматривая эту совокупность как единый эксперимент, автор исследует скользящие уровни, соответствующие объединенной модели, на основе скользящих уровней каждого из экспериментов (объединение тестов) и получает ряд результатов, продолжающих исследования Фишера, Пирсона и Гуда по комбинированию критериев.

И. Ф. Красичко

7 В40. Процентные точки для критериев L_{mvc} и L_{vc} Уилкса. Roy J., Murthy V. K. Percentage points of Wilks' L_{mvc} and L_{vc} criteria. «Psychometrika», 1960, **25**, № 3, 243—250 (англ.)

Пусть $x_{i\lambda}, i = 1, 2, \ldots, p, \lambda = 1, \ldots, n$, — выборка объема n из p-мерной нормальной совокупности

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{\lambda=1}^{n} x_{i\lambda},\quad s_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{\lambda=1}^{n}(x_{i\lambda}-\bar{x}_i)(x_{j\lambda}-\bar{x}_j),$$

$$T = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} s_{ii},\quad U = \frac{1}{p(p-1)}\sum_{i\neq j} s_{ij},\quad \bar{x} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\bar{x}_i.$$

Уилкс (Wilks S. S., Ann. Math. Statistics, 1946, **17**, 257—281) ввел следующие статистики:

$$L_{mvc} = \frac{|s_{ij}|}{[T+(p-1)U]\left[T-U+\frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{x})^2\right]^{p-1}},$$

$$L_{vc} = \frac{|s_{ij}|}{[T+(p-1)U](T-U)^{p-1}}$$

и показал, что при достаточно большом n величины $-n\log L_{mvc}$ и $-n\log_e L_{vc}$ распределены приблизительно как χ^2 с $p(p+3)/2-3$ и $p(p+1)/2-2$ степенями свободы соответственно.

В статье вычисляются 1%- и 5%-ные точки L_{mvc}- и L_{vc}-распределений для $p = 4, 5, 6, 7$ и $n = 2^5(5)60(10)100$. Для больших значений n вводится поправка a, обеспечивающая весьма тесную аппроксимацию распределений $-(n-a)\log L_{mvc}$ и $-(n-a)\log L_{vc}$ распределением χ^2.

На основе статистик L_{mvc} и L_{vc} строятся критерии для проверки гипотез соответственно: H_{mvc} — средние, дисперсии, ковариации всех компонент p-мерной нормальной величины равны; и H_{vc} — равны лишь дисперсии и ковариации. Такого рода задачи особенно часто встречаются в психометрических обследованиях. Предлагается также один непараметрический критерий симметричности многомерной совокупности. И. Ф. Красичков

7 В41. О применении предварительных тестов в некоторых статистических процедурах. Bennett B. M. On the use of preliminary tests in certain statistical procedures. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, **8**, № 1, 45—52 (англ.)

Пусть $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n_1$, и $\{y_j\}$, $j = 1, \ldots, n_2$ — две независимые выборки из нормальных совокупностей $N_1(\mu_1, 1)$ и $N_2(\mu_2, 1)$ соответственно. Требуется построить доверительный интервал для μ_1. Предварительный тест, введенный автором, указывает, можно ли использовать наблюдения второй выборки для оценки μ_1. Вся процедура состоит из двух этапов: если

$$\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_\alpha,$$

то доверительный интервал для μ_1 имеет вид

$$\frac{n_1\bar{x}+n_2\bar{y}}{n_1+n_2} - t_\alpha\frac{1}{\sqrt{n_1+n_2}} \leqslant \mu_1 \leqslant \frac{n_1\bar{x}+n_2\bar{y}}{n_1+n_2} + t_\alpha\frac{1}{\sqrt{n_1+n_2}}$$

(выборки объединяются).

Если $\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \geqslant t_\alpha$, то доверительный интервал будет

$$\bar{x} - t_\alpha\frac{1}{\sqrt{n_1}} \leqslant \mu_1 \leqslant \bar{x} + t_\alpha\frac{1}{\sqrt{n_1}},$$

где

$$t_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\,d\tau.$$

Аналогичным образом используя F — тест, автор находит процедуру построения доверительного интервала для σ_1^2 по выборкам из $N(\mu_1, \sigma_1)$ и $N(\mu_2, \sigma_2)$, где μ_1 и μ_2 известны, и определяется вероятность того, что истинное значение σ_1^2 содержится в построенном интервале. Наконец, предлагается процедура построения доверительных интервалов для σ в случае выборки из $N(\eta, \sigma)$ и

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1\xi_1^1 + \ldots \alpha_n\xi_n^1,$$

где ξ_l ортогональные полиномы и порядок регрессии n неизвестен. Предварительные тесты в этом случае позволяют оценить порядок регрессии и коэффициента α_1.

Б. В. Финкельштейн

7 В42. Некоторые применения количества информации при статистических выводах. Bhattacharyya A. Some uses of the «amount of information» in statistical inference. «Proc. 46th Indian Sci. Congr. Assoc.», Dehli, 1959. Part 2. Calcutta, s. a., 31—44 (англ.)

Обзорная статья. После небольшого исторического очерка автор вводит понятие количества информации Фишера; если $f(x, \theta)\,dx$ — вероятность того, что случайная величина лежит между $x - 1/2dx$ и $x + 1/2dx$, θ — параметр, то количество информации Фишера

$$I(\theta) = -\int f(x,\theta)\frac{\partial^2\log f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\,dx =$$

$$= \int\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2 dx = E\left(-\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta^2}\right).$$

Для многомерного случая вводится матрица (I_{ij}), где

$$I_{ij} = E\left(\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\right) = -E\left(\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right).$$

Далее приводятся свойства фишеровского количества информации, дается обзор применений $I(\theta)$ в методе максимального правдоподобия, при испытании гипотез (случай больших выборок), при нахождении доверительных интервалов для больших выборок и несмещенных оценок с минимумом дисперсии. Библ. 38 назв.

К. А. Горькова

7 В43. О способах нанесения точек на вероятностную бумагу. Kimball Bradford F. On the choice of plotting positions on probability paper. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 291, 546—560 (англ.)

Рассматриваются три вопроса, связанные с использованием вероятностных бумаг для нормального распределения и распределения

$$\exp\{e^{-(\beta y+\mu)}\},$$

а именно контроль за соответствием между типом распределения, из которого взята выборка, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и предполагаемым типом распределения; 2) оценка параметра β по наклону прямой, ставящей в соответствие x_l и $F(y_l)$; 3) графическая экстраполяция соотношения между x и $F(y)$ за границы нанесенных на диаграмму точек. На основе выборки объема $n = 6$ исследуются различные методы нахождения этого соотношения. Даются рекомендации по применению того или иного метода в зависимости от одной из трех поставленных задач.

М. Г. Поборцев

7 В44. О критерии хи-квадрат для таблиц сопряженности отрицательно мультиномиального типа. Steyn H. S. On χ^2-tests for contingency tables of negative multinomial types. «Statist. neerl.», 1959, **13**, № 4, 433—444 (англ.; рез. гол.)

Рассматривается применение критерия χ^2 для оценки параметров отрицательно мультиномиального распреде-

ления, являющегося естественным обобщением распределения отрицательно биномиального. Л. Д. Фельдман

7 В45. Таблицы и номограммы мощности F-критерия для уровней значимости 5% и 10% для использования в экспериментах с рандомизированными блоками. Keuls M. Tabellen en nomogrammen voor het onderscheidingsvermogen van de 5% en 10%-F-toets voor het gebruik bij de gewarde blokkenproef, «Statist. neerl.», 1960, **14**, № 2, 127—150 (гол.; рез. англ.)

7 В46. Два новых метода анализа совокупности признаков. Perkal J. Two new methods of analyzing a collection of attributes. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1959, **7**, № 2, 63—66 (англ.)

Пусть x_{ij} — величина i-го признака у j-го индивида, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Признаки стандартизованы таким образом, что имеют среднее 0 и дисперсию 1 и предполагаются неотрицательно коррелированными. $m_j = \frac{1}{k}\sum_i x_{ij}$ есть значение общего «фактора» для j-го индивида, а «остаток» $w_{ij} = x_{ij} - m_j$ содержит остальную часть информации. Приводится процедура расщепления совокупности признаков на группы неотрицательно коррелированных признаков, основанная на корреляционной матрице. Затем эта процедура применяется ко все более и более малым группам остатков, которые после некоторой стандартизации рассматриваются как новая совокупность признаков — до тех пор, пока не останется ни одной группы неотрицательно коррелированных остатков. Факторы легко вычисляются и допускают истолкования в естественных науках; в отличие от факторов в методах Спирмана и Терстона, они не обязательно ортогональны и некоррелированы с остатками.

S. Zubrzycki

7 В47. Семейства планов для двух последовательных экспериментов. Freeman G. H. Families of designs for two successive experiments. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 4, 1063—1078 (англ.)

Рассмотрены и классифицированы семейства планов, используемых при двукратном проведении эксперимента. Перечислены все практически осуществимые планы (имеющие более двух повторений, но не больше чем 30 различных обработок, строк и столбцов и не более 150 ячеек). Планы с этими пределами табулированы в их семействах и там, где семейство не имеет практически применимого плана, дается его наименьший член. Приводятся таблицы соотношений, которым должны удовлетворять параметры планов в рядах, чтобы принадлежать тому или иному семейству.

Ю. А. Веретенников

7 В48. Основные непараметрические тесты. Несколько общих замечаний и библиографических справок. Raison J. Les principaux tests non paramétriques. Quelques généralités et références bibliographiques. «Rev. statist. appl.», 1959, **7**, № 1, 83—106 (франц.)

Краткие исторические справки, попытки точного определения задач непараметрической статистики, преимущества и недостатки непараметрических методов, основные литературные источники и обзор литературы по современной теории наиболее важных непараметрических тестов.

Н. В. Смирнов

7 В49. Частные критерии для частных тау. Goodman Leo A. Partial tests for partial taus. «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 425—432 (англ.)

Рассматривается задача: проистекает ли зависимость между качествами Q и R из-за наличия зависимости каждого из этих качеств с третьим P. В качестве исходных данных используются порядковые ранги (Q_i, R_i, P_i) наблюденных значений Q, R, P. Частные ранговые коэффициенты корреляции $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$ определяются для $n - k$ пар троек (Q_i, R_i, P_i), (Q_j, R_j, P_j), где $i = j + k$. Рассматриваются некоторые критерии, основанные на этих статистиках. При некоторых условиях и нулевой гипотезе: Q и R независимы при данном P, эти статистики асимптотически нормальны.

E. Csáki

7 В50. Замечание об одном непараметрическом тесте. Kitabatake Satosi. A remark on a non-parametric test. «Math. japon.», 1958, **5**, № 1, 45—49 (англ.)

Дэвид (David F. N., Biometrika, 1950, **37**, 97—110) предложил следующую статистику для испытания гипотезы, что случайная величина ζ подчинена закону распределения $F_0(x)$ против альтернативы: ζ следует закону $F_1(x)$. Ось x-ов разбивается на n промежутков точками $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ $(a_0 = -\infty, a_n = +\infty)$ так, что при нулевой гипотезе значения ζ с одинаковой вероятностью попадают в любой из промежутков. Пусть v — число промежутков, в которые не попадало ни одного наблюдения в случайной выборке объема N. Окамото (Okamoto M., Osaka Math. J., 1952, **4**, 77—85) доказал, что при H_0 v-статистика распределена асимптотически нормально, что критерий, основанный на этой статистике, является состоятельным и несмещенным против широкого класса альтернатив. Отношение v/n распределено асимптотически нормально с М. О. $\int_0^1 e^{-rg}dy$, $r = N/n$, дисперсией

$$\frac{1}{n}\left[\int_0^1 e^{-rg}dy - \int_0^1 e^{-2rg}dy - r\left(\int_0^1 ge^{-rg}\,dy\right)\right]^2.$$

При этом предполагается, что $F_0(x)$ непрерывна и строго возрастающая, а $F(x)$ абсолютно непрерывная ф. р. с дифференцируемой плотностью: $G(y) = F_1 \times \times \left(F_0^{-1}(y)\right)$ и $g(y) = G'(y)$, $g(y)$ дифференцируема.

Б. В. Финкельштейн

7 В51. Непараметрическая процедура по методу «вверх и вниз». Derman Cyrus. Non-parametric up-and-down experimentation. «Ann. Math. Statistics», 1957, **28**, № 3, 795—798 (англ.)

Пусть случайная величина $Y(x)$ принимает два значения 1 и 0 с вероятностями соответственно $F(x)$ и $1 - F(x)$, где $F(x)$ — неизвестная функция распределения. Измерению доступны лишь целочисленные значения $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ На основе n наблюдений над $Y(x)$ в зависимости от выбираемых экспериментатором значений x требуется оценить α-квантиль θ распределения $F(x)$. Автор предлагает следующую процедуру: 1) x_1 берется произвольно; 2) если $x_1, \ldots, x_{m-1}$ выбраны, то x_m выбирается согласно правилу:

$$x_m = \begin{cases} x_{m-1} - 1 & \text{с вероятностью } 1/(2\alpha), \text{ если } y_{m-1} = 1, \\ x_{m-1} + 1 & \text{с вероятностью } 1 - 1/(2\alpha), \text{ если } y_{m-1} = 1, \\ x_{m-1} + 1 & \text{с вероятностью } 1, \quad \text{если } y_{m-1} = 0. \end{cases}$$

В качестве оценки θ_n для θ после n наблюдений предлагается арифметическое среднее наиболее часто повторяющихся значений x_i, $i = 1, \ldots, n$. Такая оценка оправдывается доказанной в заметке теоремой:

Если $F(x)$ — строго возрастающая функция в интервале $[\theta - 1, \theta + 1]$, то

$$P\{\max[\,|\limsup_{n\to\infty} \theta_n - \theta|\,,\ |\liminf_{n\to\infty} \theta_n - \theta|\,] < 1\} = 1.$$

И. Ф. Красичков

7 В52. Об оценке коэффициентов регрессии временного ряда с непрерывным параметром и стационарным остатком. Chiang Tse-Pei. On the Estimation of Regression Coefficients of a Continuous Parameter Time Series with a Stationary Residual. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, **4**, № 4, 405—423 (англ.; рез. русск.)

Пусть $y(t)$, $-\infty < t < +\infty$, — стохастический процесс, который можно представить в виде суммы $y(t) = x(t) + m(t)$, $x(t)$ — стационарный в широком смысле центрированный процесс, $m(t) = \sum_{\nu=1}^{s} \gamma_\nu \varphi_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, s$, где $\varphi_\nu(t)$ — известные функции, γ_ν — неизвестные

константы. Задача заключается в оценке вектора $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ по одной реализации процесса $y(t)$ в конечном интервале $-T \leqslant t \leqslant T$. Решение получается минимизацией квадратичной формы

$$\int_{-T}^{+T} | y(t) - \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu \varphi_\nu(t) |^2 dt. \qquad (1)$$

Полученная оценка является несмещенной. Доказывается, что наиболее эффективная линейная оценка γ существует и при добавочных условиях на процесс $x(t)$ и функции $\varphi_\nu(t)$, оценка, полученная минимизацией (1), асимптотически наиболее эффективная в классе всех линейных оценок γ. R. Bartoszyński

7 В53. Последовательный анализ для двух альтернативных последовательностей. Bertram Günter. Sequenzanalyse für zwei Alternativfolgen. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 4, 185—189 (нем.)

Пусть результат эксперимента состоит из двух последовательностей соответственно из N_1 и N_2 элементов. Каждый элемент в первой (второй) последовательности обладает некоторым признаком с вероятностью $p_1(p_2)$. Требуется оценить разность $p_2 - p_1$. Даются рекомендации о том, как для упомянутой задачи применять метод последовательного анализа Вальда. В частности, для получения оценок рекомендуется использовать номограммы, приводимые в статье.

Б. В. Финкельштейн

7 В54 К. Практическое введение в статистику. 2-е изд. Liorzou A. Initiation pratique à la statistique. 2 éd. Paris, Eyrolles, Gauthier—Villars, 1957, 214 p., ill. (франц.)

Чисто практическое руководство.

7 В55 К. Информация и решающие процессы. Machol Robert E. Information and decision processes. New York, McGraw—Hill Book Co., 1960, xi, 185 pp., ill., 5.95 doll. «Publishers' Weekly», 1960, **178**, № 7, 73 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Редактор *Н. Н. Воробьев*

7 В56. Обобщение неравенства минимакса. Schützenberger Marcel-Paul. Sur une généralisation de l'inégalité minimax. «Cahiers Bur. univ. rech. operat.», 1957, № 2, 3—9 (франц.)

Обозначим через $\overset{(p)}{M}$ p-й элемент конечного упорядоченного множества. Даются необходимые и достаточные условия выполнения неравенства

$$\overset{(h)}{M}_i \overset{(k)}{M}_j a_{ij} \leqslant \overset{(k)}{M}_j \overset{(h)}{M}_i a_{ij}.$$

Е. Б. Яновская

7 В57. Модель торгового соглашения для кооперативной игры n лиц. Harsanyi John C. A bargaining model for the cooperative n-person game. «Ann. Math. Studies», 1959, **4**, № 40, 325—355 (англ.)

Статья в духе работ Нэша (Nash J., Econometrica, 1950, **18**, 155—162; РЖМат, 1955, 2338). Решение проблемы торгового соглашения (bargaining problem) с данным исходным вектором дележей $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, принадлежащим компактному и выпуклому пространству дележей P, определяется как такой дележ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, который максимизирует произведение

$$\pi = \prod_{i=1}^{n} (u_i - d_i)$$

при условиях $u \in P$; $u \geqslant d$ и $d = \text{const}$. В отличие от модели Неймана — Моргенштерна в данной модели игроки входят одновременно во все коалиции, которые здесь называются «синдикатами», и поэтому их выигрыш определяется общей суммой выигрышей, которые им гарантирует каждый синдикат (суммой «дивидендов»). Формулируется 7 аксиом, из которых непосредственно выводятся теоремы существования. Рассматривается специальный случай игр с допускающим передачу выигрышем (transferable utility). О. Н. Бондарева

7 В58. Теория игр и выбор способа помещения капитала (...как ее можно применить к анализу безопасности). Hale Irving. The theory of 'games' in stock selection... how it might be applied to security analysis. «Financ. Analysts J.», 1960, **16**, № 2, 53—56 (англ.)

Примеры 2×2 и 3×3 матричных игр, выдержанные в духе «холодной войны». С. С. Кислицын

7 В59. Моделирование военных действий крупного масштаба. Geisler Murray A. The simulation of a large—scale military activity. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 4, 359—368 (англ.)

Обсуждается первый эксперимент Лаборатории логистических систем корпорации РЭНД, проведенный с целью оценки различных стратегий управления для сложной реальной системы — Военно-Воздушных Сил США. При постановке эксперимента основным методом исследования было моделирование работы системы на электронной цифровой вычислительной машине (использовалась машина ИБМ-704). Приводятся некоторые сведения о втором эксперименте, который Лаборатория ставит в настоящее время. Целью работы является выполнение исследований, результаты которых послужат руководством при формировании баллистических межконтинентальных сил США. Л. Н. Куцев

7 В60. Замечания о продаже с аукциона. Moriguti Sigeiti, Suganami Saburo. Notes on auction bidding. «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1959, **2**, № 2, 43—59 (англ.)

Рассматривается следующий вопрос: с аукциона должны быть проданы 2 предмета, на которые имеются 2 покупателя, причем каждый из них знает количество денег у другого покупателя и стоимости предметов. Находится оптимальное поведение для обоих покупателей, когда либо каждый из них максимизирует свой доход, либо максимизирует разность своего дохода и дохода другого покупателя. Е. Б. Яновская

7 В61. Математическая модель Лотка и Вольтерра для определения межвидовой борьбы. Klomp H. Het mathematisch model voor concurrentie van Lotka en Volterra. «Vakbl. biol.», 1960, **40**, № 1, 3—15 (гол.)

7 В62. Полиморфизм и естественный отбор. Fisher Ronald. Polymorphism and natural selection. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 284—289 (англ.; рез. франц.)

Попытка объяснить дивергенцию с помощью теории игр, по аналогии с процессом обучения. Критикуется смешение понятий приспособления и естественного отбора, непрерывного и дискретного полиморфизма.

В. А. Айзенштейн

7 В63. Неравенства в стохастическом линейном программировании. Vajda S. Inequalities in stochastic linear programming. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 357—363 (англ.)

Доказывается, что если β — случайный вектор и ограничения $AX = \beta$, $X \geqslant 0$, совместны с вероятностью 1, то математическое ожидание максимума линейной формы $C^T X$ при этих ограничениях не превосходит максимума этой линейной формы при условиях $AX = E\beta$, $X \geqslant 0$. Рассматриваются различные подходы к вопросу о наилучшей компенсации неточностей при задании правых частей ограничений. И. В. Романовский

7 В64. Решение задач линейного программирования с переменными параметрами. Shetty C. M. Sol-

ving linear programming problems with variable parameters. «J. Industr. Engng», 1959, **10**, № 6, 433—438 (англ.)

Предположим, что в имеющейся уже решенной задаче линейного программирования изменились коэффициенты линейной формы и ограничений. Предлагается алгоритм для отыскания решения этой измененной задачи с использованием имеющегося решения исходной задачи. Рассмотрен пример. Л. И. Горьков

7 В65. Один метод решения задач линейного программирования. Maghout Khaled. Une méthode pour la résolution des programmes linéaires. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 14, 2510—2512 (франц.)

Введение определенных «булевских» переменных позволяет решать задачи линейного программирования и проводить их общее исследование. Метод имеет интересные приложения к параметрическим задачам линейного программирования. А. А. Корбут

7 В66. Итерационный метод линейного программирования. Pietrzykowski Tomacz. An iteration method of linear programming. «Prace zakł. apar. mat. PAN», 1960, № A5, 8 s. (англ.)

Для построенного итерационного метода решения задач линейного программирования доказана сходимость. Этот метод оказывается весьма удобным при решении задач большого объема. Л. И. Горьков

7 В67. Вырождение в задачах линейного программирования. Winkel Harald. Die Entartung linearer Planungsaufgaben. «Z. Betriebswirtsch.», 1960, **30**, № 4, 223—230 (нем.)

На простом примере рассматривается случай вырождения в симплексе-методе.

7 В68. Численные методы решения задач линейного программирования. Рубинштейн Г. Ш. В сб. «Применение матем. в экон. исслед.», М., Соцэкгиз, 1959, 437—460

Рассматривается следующая задача. Требуется найти наибольшее значение функции $\mu(h) = \min_i \sum_s a_i^s h_s/k_i$ при условии, что $\sum_{s=1}^r h_s = 1$, $h_s \geqslant 0$, где $k_i > 0$, $a_i^s \geqslant 0$ ($i = 1, \ldots, n$) — заданные числа. Искомый вектор $h = (h_1, \ldots, h_r)$ называется оптимальным планом. На основе сформулированного критерия оптимальности плана описаны два метода решения рассматриваемой задачи. Приведен численный пример.

Сформулированная более общая задача формальными преобразованиями может быть сведена, как замечает автор, к рассмотренной задаче. Для основной задачи теории матричных игр описан итеративный метод Брауна и Робинсон. Л. И. Горьков

7 В69. Линейное программирование — метод принятия решений. Kane Robert B. Linear programming, an aid to decision making. «Math. Teacher», 1960, **53**, № 3, 177—179 (англ.)

7 В70. Упрощенные методы линейного программирования. Hýbl J. Zjednodušené metody lineárního programování. «Statist. obzor», 1960, **40**, № 3, 125—127 (чешск.)

7 В71. Задачи линейного программирования на первом году обучения алгебре. Lichtenberg Donovan, Zweng Marilyn. Linear programming problems for first-year algebra. «Math. Teacher», 1960, **53**, № 3, 171—176 (англ.)

Методическая статья.

7 В72. Рассмотрение нескольких задач, возникающих при разделении продукта со случайным весом на определенные или случайные количества. Morillon Y. Etude de quelques problèmes posés par le découpage de produits de poids aléatoires en produits de poids fixes ou aléatoires. «Rev. franç. rech. opérat.», 1959, **3**, № 13, 201—220 (франц.)

Плавка дает случайное количество металла, который разливается по нескольким одинаковым по виду формам. Решены задачи: 1) найти м. о. убытка, если он равен весу последнего нецелого слитка; размер формы детерминирован; 2) тот же вопрос, если считать убытком последний слиток при его весе, меньшем доли Θ от веса целого слитка; 3) тот же вопрос при нормальном распределении величины плавки и размера форм и определении убытка, как в 2). С. С. Кислицын

7 В73. Вычисление потребностей в тетраэтилсвинце в рамках схем линейного программирования. Kawaratani T. K., Ullman R. J., Dantzig George B. Computing tetraethyl-lead requirements in a linear programming format. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 1, 24—29 (англ.)

Рассматривается задача о нахождении количеств тетраэтилсвинца, которые надо добавить к каждому из смешиваемых сортов бензина, с тем, чтобы смесь этих бензинов имела заданное октановое число. При некоторых предположениях о влиянии содержания тетраэтилсвинца в бензине на его октановое число эта задача путем аппроксимации сводится к задаче линейного программирования. А. А. Корбут

7 В74. Общая задача планирования производства электроэнергии и электростанции, работающие на приливах и отливах. Gibrat Robert. Le problème général des plans de production d'énergie électrique et les usines marémotrices. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 321—334 (франц., рез. англ.)

Рассматривается следующая задача. Электростанции разбиты на n классов: тепловые, атомные, использующие энергию морских приливов и т. д. Электростанции вместе должны произвести требуемые количества трех видов энергии: гарантийной, пиковой и годовой (нельзя производить один вид энергии, не производя остальные). Все электростанции одного класса имеют одинаковые технические и экономические характеристики.

Пусть a_i — гарантийная энергия, производимая электростанцией i-го класса, b_i — пиковая энергия, c_i — годовая энергия, d_i — капитальные затраты на электростанцию i-го класса, f_i — затраты по эксплуатации минус стоимость угля, который бы потребовался электростанции с техническими и экономическими характеристиками электростанции i-го класса, но которая бы работала на угле, k — норма прибыли. Требуется составить план $(x_1, \ldots, x_n)$ (x_i — количество используемых электростанций i-го класса), удовлетворяющий условиям

$$A = \sum_{i=1}^n a_i x_i \geqslant A_0, \quad B = \sum_{i=1}^n b_i x_i \geqslant B_0,$$

$$C = \sum_{i=1}^n c_i x_i \geqslant C_0$$

(A_0, B_0, C_0 заданы) и минимизирующий сумму $\sum_{i=1}^n d_i x_i + k f_i x_i$.

В. Н. Комлева

7 В75. Приложение линейного программирования к экономике сельского хозяйства. Vincent Shirley E. An application of linear programming to agricultural economics. «Appl. Statist.», 1960, **9**, № 1, 28—36 (англ.)

7 В76. Линейное программирование. I. II. III. Ватанабэ. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 1, 57—63; № 2, 105—115, 101; № 3, 157—177 (японск.)

7 В77. Об одной классической работе по применению математики в экономике. Bod Peter. A matematika közgazdasági alkalmazásának egy klasszikus munkájáról. L. V. Kantorovics: «A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei» című könyvének

ismertetése. «Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl.», 1960, **10**, № 1, 39—57 (венг.)

Речь идет о работе Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», Л. 1939.

7 В78. Комбинаторные построения и теория графов. Ghouila Houri A. Structures combinatoires et théorie des graphes. «Trav. et méthodes», 1960, № 141, 87—90 (франц.)

Автор сводит задачу о распределении n рабочих по машинам и некоторые задачи составления расписаний на железных дорогах к проблеме нахождения максимального потока через сеть; эта последняя решается известным алгорифмом Форда — Фулкерсона.

Р. Е. Кричевский

7 В79. Обобщение алгорифма Форда — Фулкерсона для транспортных сетей. Ghouila—Houri Alain. Une généralisation de l'algorithme de Ford — Fulkerson relatif aux réseaux du transport. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 3, 457—459 (франц.)

Рассматривается задача о нахождении максимального потока без источников и стоков на графе при заданных ограничениях на пропускные способности ребер. Предлагаемый для решения задачи алгорифм является видоизменением алгорифма Форда — Фулкерсона (РЖМат, 1958, 1052) о максимальном потоке через сеть с заданными источником и стоком. И. В. Романовский

7 В80. Обобщенная транспортная задача. Kn5del W. Ein verallgemeinertes Transportproblem. «Unternehmensforschung», 1960, **4**, № 1, 1—12 (нем.; рез. англ.)

Рассматривается задача о перевозке нескольких видов продукции в форме «шахматки»:

Имеется m заводов, производящих r видов продукции, при этом, если i-й завод производит d_{si} продукции s, то

$$d_{si} \leqslant p_{si}, \quad \sum_s d_{si} = p_i.$$

Имеется n потребителей этой продукции, j-й потребитель должен получить b_{sj} продукции s $\left(\sum_j b_{sj} = \sum_i d_{si}\right)$.

Требуется минимизировать общую стоимость перевозки

$$\sum_{s,i,j} c_{sij} x_{sij},$$

где c_{sij} — стоимость перевозки единицы продукции s от завода i до потребителя j, а x_{sij} — количество этой продукции. Доказывается, что эту задачу можно свести к задаче Хичкока. Рассматриваются частные случаи.

И. В Романовский

7 В81. Заметка к решению транспортной проблемы линейного программирования симплекс-методом. Machek Josef. A note on the solution of the transportation problem by the simplex method. «Časop. pěstov. mat.», 1960, **85**, № 1, 44—50 (англ.; рез. чешск., русск.)

Указывается на то, что при решении так называемой транспортной проблемы посредством симплекс-метода, векторы, возникшие из столбцов коэффициентов левой части, выражающих условия задачи уравнений, выражены посредством векторов, образующих базис таким образом, что коэффициентами являются $+1$ и -1. Следовательно, критерий для замены векторов в базисе или критерий оптимальности решения выражен в виде суммы коэффициентов линейной формы, которая должна быть минимальна, со знаком $+$ или $-$. Метод, предложенный автором, совпадает с известным алгорифмом Данцига (Dantzig G. B., Application of the simplex method to a transportation problem см. сборник; T. C. Koopmans: Activity analysis of production and allocation, New York, 1951) и Ф. Ножички (РЖМат, 1957, 7098).

J. Bílý

7 В82. Метод резервов в квадратичном программировании. Houthakker H. S. The capacity method of quadratic programming. «Econometrica», 1960, **28**, № 1, 62—87 (англ.)

Требуется найти условный максимум функции

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \frac{1}{2} A_{11} x_1^2 + A_{12} x_1 x_2 + \ldots + A_{1n} x_1 x_n +$$

$$+ \frac{1}{2} A_{22} x_2^2 + \ldots + A_{2n} x_2 x_n + \ldots + \frac{1}{2} A_{nn} x_n^2$$

или, в матричном обозначении, $a'x + \frac{1}{2} x'Ax$, где a, x — векторы, а A — отрицательно определенная симметрическая матрица. На переменные наложены ограничения:

$$\text{а) } x_i \geqslant 0, \quad \text{б) } \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \beta^*, \quad \text{в) } \sum_{i=1}^{n} B_{hi} x_i \leqslant b_h,$$

где $h = n+1, \ldots, n+m$; $B_{hi} \geqslant 0$, $b_h > 0$. Метод решения основан на введении «переменной резерва» β, изменяющейся в пределах от 0 до β^*. Последовательно вычисляются «критические» точки $\beta_0 = 0$, β_1, $\beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_g, \ldots$, такие, что в интервалах $\beta_g < \beta < \beta_{g+1}$ максимум достигается при положительных значениях различных множеств переменных x_i. Дается ряд экономических интерпретаций задачи.

С. С. Кислицын

7 В83. Теория предсказания и динамическое программирование. Odanaka Tosio. Prediction theory and dynamic programming. «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1959, **2**, № 2, 80—92 (англ.)

Методом динамического программирования решается задача минимизации квадратичной формы. Эта задача возникает при линейной фильтрации или экстраполяции по дискретным данным, когда в качестве критерия оптимальности принимается требование минимума средней квадратической ошибки.

Л. Н. Куцев

7 В84. Влияние рентабельности на темп инвестиций в свободной экономике. Verhulst Michel. Influence de la rentabilitá sur le rythme des investissements en économie libérale. «Industria (Ital.)», 1958, № 3, 318—335 (франц.)

Автор выдвигает несколько простых предположений относительно зависимости между приростом инвестиций, производственной мощностью предприятия, ценами и т. д. В результате он получает соотношение, характеризующее связь между темпом роста инвестиций и темпом изменения нормы прибыли. Это соотношение иллюстрируется данными экономической статистики за последние 15 лет.

А. А. Конюс

7 В85. Патинкин о деньгах и ценах товаров. Schneider Erich. Patinkin über Geld und Güterpreise. «Nationaløkon. tidsskr.», 1958, **96**, Tillaegesh., 315—331 (нем.)

Полемика с израильским экономистом Дон-Патинкиным, в книге которого «Деньги, проценты и цены» (см. реф. 7 В108К) утверждается, что функция спроса должна содержать в качестве своих аргументов не только соотношения цен и реальный доход индивида, как это полагал Леон Вальрас, но и наличность кассы в реальном выражении. Рассматривая, как и Патинкин, гипотетический случай обменного хозяйства без производства, автор защищает точку зрения Вальраса.

А. А. Конюс

7 В86. Числа и эластичности. Chamberlin Edward H. Numbers and elasticities. Nationaløkon. tidsskr.», 1958, **96**, Tillaegesh., 30—40 (англ.)

Рассматривается так называемая «эластичность цены», т. е. отношение малого относительного приращения количества проданного товара к соответствующему малому относительному снижению цены этого товара. Автор спрашивает, имеется ли положительная корреля-

ция между числом продавцов на рынке и эластичностью спроса для каждого продавца. Пользуясь графическими построениями, он приходит к выводу, что существование такой корреляции можно допустить только при некоторых специальных предположениях относительно условий рынка. А. А. Конюс

7 В87. Стохастическая диффузионная теория цен. Robinson Enders A. A stochastic diffusion theory of price. «Econometrica», 1959, **27**, № 4, 679—684 (англ.)

Пусть цена измеряется в единицах π, а время — в единицах τ. Величина избыточности спроса x_t выражается формулой:

$$x_t = -ap_t + u_t,$$

где p_t — отклонение цены в момент t от равновесной цены, а u_t — случайная величина, распределенная равномерно в промежутке $[-aR, aR]$. Предполагается, что

$$p_{t+\tau} = \begin{cases} p_t + \pi \text{ при } x_t \geqslant 0, \\ p_t - \pi \text{ при } x_t < 0. \end{cases}$$

Вычисляется ряд характеристик этой модели, например, $E(p_t \mid p_0)$, $D(p_t \mid p_0)$. Аналогичные расчеты произведены для случая, когда $\tau \to 0$, $\pi \to 0$, $R \to \infty$, $1/R\tau \to \alpha$, $\pi^2/\tau \to \sigma^2$. С. С. Кислицын

7 В88. Некоторые проблемы применения математики в экономических исследованиях. Pajestka Józef. Niektóre problemy stosowania matematyki w badaniach ekonomicznych. «Economista», 1959, № 3, 560—579, 757, 761—762 (польск.; рез. русск., англ.)

В работе приводится ряд соображений, показывающих необходимость и целесообразность использования математических методов в экономических науках. В первой части статьи говорится о преимуществе математического языка, обеспечивающего точность экономических выводов. В качестве примера рассматривается вопрос о распределении новых инвестиций между производством продуктов производства и производством продуктов потребления. Далее автор говорит о конкретизации экономических закономерностей с помощью математического исследования, о необходимости сочетания применения политической экономии и математических методов в практике планирования. Применение математики в теории социалистической экономической калькуляции должно идти по двум направлениям: координационная калькуляция (балансовый метод, input — output) и калькуляция оптимизации (экстремальные задачи линейного программирования). А. М. Вершик

7 В89. Об анализе структурных свойств больших экономических моделей затрат и выпуска продукции. Wenke Klaus. On the analysis of structural properties of large scale microeconomic input-output models. «Conf. 6 Congr. internat. «Inst. Manag. Sci.», Paris, 1959, Londres — Paris — New York — Los Angeles», s. a., 1/4—17/4 (англ.)

Работа посвящена анализу экономических систем, зависящих от многих параметров и имеющих часто меняющуюся сложную структуру взаимосвязей элементов. Для описания функционирования таких систем могут быть построены различные математические модели (например, модели типа Леонтьева), при рассмотрении которых мы сталкиваемся с проблемой решения громоздких систем уравнений. Предлагается алгорифм, позволяющий получить удобную для практической реализации схему вычислений. Это позволяет осуществить численное решение большого класса таких систем. Л. Н. Куцев

7 В90. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели. Канторович Л. В., Горьков Л. И. «Докл. АН СССР», 1959, **129**, № 4, 732—735

Дается математическая постановка нескольких простейших динамических задач, возникающих при анализе экономических явлений. Например: при заданном изменении ресурсов труда $T(t)$ (во времени) определить характер изменения основных фондов $R(t)$, если технологическая структура способа производства $U(R, T)$ известна. Если потребление составляет некоторую долю $(1-\gamma)$, а оставшаяся часть идет на накопление, или если потребление пропорционально ресурсам труда, то соответствующие функциональные уравнения выглядят так:

$$dR/dt = \gamma U(R(t), T(t)) \text{ — в первом случае,}$$

$$dR/dt = U(R(t), T(t)) - aT(t) \text{ — во втором случае.}$$

Здесь $U(R, t) = \int_0^1 R^\alpha T^{1-\alpha} dp(\alpha)$ — однородная функция, $p(\alpha)$ — неубывающий вес, γ, a — коэффициенты пропорциональности. При этом предполагается, что основные фонды могут быть мгновенно мобилизованы. Если отказаться от этого предположения и ввести функцию распределения соответственно фондов и рабочей силы по сроку службы в зависимости от времени — $r(t-\tau)\,d\tau$ и $m(t-\tau)\,d\tau$, то интегро-дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$dR/dt = \gamma \int_0^\beta U\left(\frac{1}{2} r(t-\tau),\ m(t-\tau)\right) d\tau,$$

β зависит от доли амортизационных отчислений. Выведенные авторами уравнения интегрируются численно. Явное отыскание всех функций позволяет найти различные экономические показатели: оценку труда $\partial U/\partial T$, нормальную эффективность капиталовложений $\partial U/\partial R$, учет технического прогресса и т. д. Модель также может использоваться для определения правомерности различных методов экономического расчета. А. М. Вершик

7 В91. Биологическое явление борьбы за жизнь, устойчивость капиталистической экономики и предсказание закона Парето. Maravall Casesnoves Dario. El fénomeno biologico de la lucha por la existencia, la estabilidad de la economia capitalista y la prediccion de la ley de Pareto. «Gas. mat.», 1959, **11**, № 1-2, 6—11 (исп.)

7 В92. Предпочтение сорта и простые марковские процессы. Maffei Richard B. Brand preferences simple Markov processes. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 2, 210—218 (англ.)

Марковские процессы с двумя состояниями могут быть использованы для изучения предпочтения одного из двух сортов продаваемого товара. Обсуждаются изменения в торговле за каждый период, прибыли и убытки, возникающие при использовании рекламы, и скорость сходимости к потреблению с постоянным спросом на каждый из сортов товара. Е. Б. Яновская

7 В93. О концепциях проблемы и ее решения. Bellman Richard, Brock Paul. On the concepts of a problem and problem-solving. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 2, 119—134 (англ.)

Цель статьи — обсудить роль математиков в выборе пути от постановки проблемной задачи до ее решения, в связи с бурным развитием быстродействующей вычислительной техники. Разбираются проблемы, возникающие в повседневной жизни: естественные проблемы, проблемы моделирования и проблемы символов. Анализируются математические трудности трех видов: аналитические, вычислительные, а также трудности постановки математической задачи. На вопрос, сможет ли вычислительная машина решить любую трудную задачу, дается отрицательный ответ. В этой связи подчеркивается главенствующая роль математиков в разработке новых математических методов решения задач, таких как теория игр, исследование операций, динами-

ческое программирование и т. д. Статья иллюстрируется примерами. Библ. 14 назв. Н. А. Бодин

7 В94. Методы исследования операций в промышленности. Haertel Rudolf. Methoden des Operations Research in der Industrie. Informationstagung in St. Gallen. «Z. Betriebswirtsch.», 1960, **30**, № 4, 255—259 (нем.)

Краткий обзор восьми докладов по различным математическим методам исследования операций, прочитанных на информационном заседании, посвященном промышленным применениям исследования операций (Галлен, декабрь, 1959 г.). А. А. Корбут

7 В95. Применение методов исследования операций к сложным финансовым соглашениям — иллюстрация на примере задачи о разделе прибылей. Shakun Melvin F. Application of operations research to complex financial agreements — a profit-sharing illustration. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 1, 65—81 (англ.)

Предлагается математический подход к указанной в заголовке задаче и строится ее модель, сводящаяся к решению системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений. А. А. Корбут

7 В96. Оптимизация деловых операций. Leutert W. W. Optimization of business operations. «Computers and Automat.», 1960, **9**, № 7, 5—9 (англ.)

7 В97. Методы теории графов в науках управления. Harary Frank. Graph theoretic methods in the management sciences. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 4, 387—403 (англ.)

Рассматриваются понятия теории графов, моделирующие некоторые понятия организации: 1) Связывающее лицо (вершина, разделяющая граф). 2) Группа с хорошей организацией связи — «клика» (максимальный полный подграф). 3) Участники, усиливающие и ослабляющие группу (вопросы упорядочения вершин ориентированного графа). 4) Подсчет направленных путей от одной вершины графа до другой с устранением «избыточных» — самопересекающихся путей. 5) Статус члена организации (функция, заданная на вершинах древовидного графа) — математическая обработка идей, навеянных работой Паркинсона (Иностранная литература, 1959, № 6, 217—238). и т. п.

Приводятся нерешенные проблемы. Библ. 27 назв. И. В. Романовский

7 В98. Новые математико-статистические методы руководства предприятиями. Heinhold J. Neue mathematisch-statistische Methoden der Betriebsführung. «Maschinenmarkt», 1960, **66**, № 27, 26—30 (нем.)

Элементарный очерк исследования операций.

7 В99. Современные направления в исследовании операций. Stengel J. Tendances actuelles de la recherche opérationnelle. «Hommes et techn.», 1960, **16**, № 186, 527—532 (франц.)

Дается оценка развития трех основных направлений в исследовании операций: философского, технологического и методологического. Е. Б. Яновская

7 В100. Исследование операций. Садзи Нобуо. «Дэнки цусин», 1959, **22**, № 154, 34—39 (японск.)

Элементарная обзорная статья.

7 В101. Использование математических моделей в оценке уличного движения. Voorhees Alan M. Use of mathematical models in estimating travel. «J. Highway Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1959, **85**, № 1, 129—141 (англ.)

Некоторые результаты статистического обследования движения городского транспорта. А. А. Корбут

7 В102. Приложение вероятностной теории решений к одной простой задаче управления запасами. Tintner Gerhard. The application of decision theory of probability to a simple inventory problem. «Trab. estadist.», 1959, **10**, № 3, 239—247 (англ.)

Товар покупается по цене b_1, а продается по цене b_2 за единицу. На простых примерах рассматривается задача выбора политики закупок, максимизирующей прибыль (или ее математическое ожидание), в случаях а) когда размер продажи известен, б) когда размер продажи есть случайная величина с заданным распределением, в) когда это распределение неизвестно. Последний случай интерпретируется как игра против природы. А. А. Корбут

7 В103. Метод предсказания для управления запасами модных сезонных товаров. Hertz D. B., Schaffir K. H. A forecasting method for management of seasonal style-goods inventories. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 1, 45—52 (англ.)

Продажа единицы товара во время сезона дает прибыль c. После окончания сезона прибыль падает до $c' \ll c$. Распределение спроса нормально, а границы сезона определяются величинами 5% и 95% от общей продажи. Расчет оптимального количества товара основан на вероятностях $P_{k,w}$ продать k-ю единицу до конца сезона. Указан метод для определения длины сезона и отмечается, что его длина обычно также является случайной (со стандартом 4—6%). С. С. Кислицын

7 В104. Математическая модель одной кассовой задачи. Kosten L. Een mathematisch model voor een reserveringsprobleem. «Statist. neerl.», 1960, **14**, № 1, 85—94 (гол.; рез. англ.)

7 В105. Математико-статистические и хозяйственно-математические исследования о состоянии, потребностях в замене и потребностях в расширенной подготовке научно-технических кадров. Burkhardt Felix. Mathematisch — statistische und wirtschaftsmathematische Untersuchungen über den Bestand, Ersatzbedarf und Erweiterungsbedarf an wissenschaftlich — technischen Fachkräften. «Wiss. Z. Karl — Marx — Univ., Leipzig. Math.-naturwiss. Reihe», 1958—1959, **8**, № 5, 1031—1032 (нем.)

7 В106 К. Максимумы и минимумы. Теория и экономические приложения. Frisch Ragnar. Maxima et minima. Théorie et applications économiques. «Trad. de norvég.» Paris, Dunod, 1960, XII, 178 p., ill. (франц.)

7 В107 К. Что такое линейное программирование. Барсов А. С. М., Физматгиз, 1959, 104 стр., илл., 1 р. 60 к.

Работа состоит из четырех глав и введения, в котором описаны два приложения линейного программирования — транспортная задача и задача на минимум денежных затрат при заданном плане выпуска продукции. В гл. I выборочно излагаются понятия и определения линейной алгебры. В гл. II описывается симплекс-алгоритм решения задачи линейного программирования. Гл. III посвящена изложению решения матричной постановки транспортной задачи. В гл. IV содержится постановка и решение нелинейной транспортной задачи, в которой требуется минимизировать максимальное время доставки (где максимум берется по всем осуществляемым видам перевозки). Предлагаемый автором метод фактически состоит в последовательном решении ряда транспортных задач с наложением запретов на самые медленные способы перевозки.

Примечание референта. В работе вообще отсутствует понятие двойственной задачи, а в связи с этим вовсе не упоминаются многие важные понятия и методы. Мало внимания уделено приложениям. И. В. Романовский

7 В108 К. Деньги, процент и цены. Объединение монетарной теории и теории стоимости, с математическим приложением. Patinkin Don. Money, interest, and prices. An integration of monetary and value theory, with a mathematical appendix. Evanston, Ill., Row, Peterson and Co., New York, White Plains, 1956, xix, 510 pp. (англ.)

Эта работа представляет собой важный шаг в переформулировании монетарной теории, поскольку она проясняет проблемы и ставит их в ряд с методами обычной теории стоимости. Для количественной теории де-

нег и других аспектов определений нормы процента и абсолютного уровня цен используются последовательные формулировки, в которых выбор денежных балансов производится одновременно с выбором товаров. В гл. I дается очерк экономики меновой торговли; нет ничего нового, но изложение необыкновенно ясное. Особо подчеркивается различие между индивидуальным и рыночным экспериментом; во-первых, изучаются реакции индивидуума на такие переменные, как цены, которые являются для него параметрами; во-вторых, рассматривается реакция рыночных равновесных цен и других экономических величин на изменение параметров всей системы в целом (к числу таких параметров относится общее количество денег). В следующих четырех главах модель расширяется; в нее включаются деньги и акции. В качестве основных предположений принимается существование экзогенного потока товаров, принадлежащих отдельным лицам в данный и в последующие моменты времени, зависимость функции полезности каждого лица от расходов в эти моменты, а также от фактического запаса денег в настоящем и в будущем и что для каждого периода времени сделаны выборы, при которых бюджет равен (величине расходов и купленных акций) + (предполагаемый доход от продажи имеющихся товаров) + (полученные проценты с имевшихся акций) + (начальный капитал). Предполагается, что будущие цены будут такие же, как и текущие. (В этой модели акции не входят непосредственно в функцию полезности, хотя они и производят стоимость благодаря выплатам процентов). Это экономика без денежной иллюзии в том смысле, что удваивание всех цен и начальных денег владельцев оставляет исходную ситуацию совершенно неизменной. Рыночное равновесие определяется равенством спроса и предложения для текущего периода на всех рынках (товарном, рынках акции и денег; по закону Вальраса равенство на последнем рынке следует из равенства на первых трех); будущие периоды входят только в индивидуальные планы, но не включаются в рыночные. Далее показано, что равнопропорциональное изменение в начальных денежных запасах оставит равновесную норму процента не измененной и пропорционально изменит все цены товаров. Следовательно, количественная теория денег исходит исключительно из отсутствия денежной иллюзии и не связана с различными частными предположениями, приводимыми в литературе. Ряд специфических заключений вытекает из предположения о форме функции спроса для денег. (Но можно было бы значительно больше использовать аппарат анализа спроса). Самый важный вывод, следующий из этого анализа, направлен против частой дихотомизации процессов ценообразования, при которой считается, что относительные цены товаров определяются условиями равновесия на своих рынках и абсолютным уровнем цен, определяемым в свою очередь независимым монетарным уравнением. Показано, что эта модель логически противоречива, особенно если ее рассматривать с динамической точки зрения, т. е. в приближении к равновесию. Эта модель базируется на законе спроса и предложения. Именно предполагается, что цена на каждом рынке изменяется пропорционально разности спроса и предложения. Показано, что динамика регулирования возрастания предложения денег имеет смысл только тогда, когда спрос и предложение товаров и акций зависит от фактической величины запаса наличных длин, так же как и от относительных цен. Гл. VII — отступление, в котором приводится пример применения понятия полезности в области денежных балансов. Предлагается модель, в которой на рынке периодически заключаются договоры, но между периодами выплат по договору проходят интервалы случайной длины. Тогда сумма неплатежей равна максимальному излишку за период времени, в котором накопленный долг превышает полученные выплаты больше, чем на начальный капитал. Введенные вероятности вычисляются в приложении Дворецким. Полезность денег уменьшает вероятность неплатежа. (Автор, вероятно, предполагает, что это объяснение отличается от того объяснения, которое приписывает полезность денег несовершенству аппарата кредита, но референт считает все же невозможным заимствовать деньги между периодами выплат по договорам, что является несовершенством рынка. Случайность платежей несомненно приближает нас к действительности, но не является, насколько может видеть референт, логически необходимой для объяснения полезности денег, раз уж не допускаются слишком большие неплатежи, ибо даже при детерминированности платежей индивидуум может предпочесть неплатеж обладанию достаточно большим начальным запасом денег). В гл. IX—XI представлен макроэкономический вариант модели. Описаны свойства различных функций спроса и предложения, показана стабильность системы. Сделан ряд выводов относительно специфических свойств функций. В гл. XII изучаются последствия отказа от некоторых ранее сделанных предположений. В гл. XIII исследуется поведение модели в условиях безработицы (т. е. при отсутствии равновесия или при наличии жестких цен). В этом случае возникает ряд интересных проблем, касающихся обычных функций спроса и предложения, но они не решаются. Макроэкономическая модель используется затем для разработки кейнсианской теории безработицы как динамического явления (точнее, как явления, включающего равновесие безработицы). Наконец, с этой точки зрения критикуется кейнсианская теория процента и ее связь с неоклассическими теориями. При изложении используются как словесные, так и графические аргументы; математика отправлена в приложения. Автор утверждает даже, что математика не так уж необходима для изложения. (Несмотря на то, что во многих случаях достаточно словесного и графического пояснений, это отнюдь не всегда так. Например, графическая аргументация стабильности макроэкономической системы недостаточна и не эквивалентна (правильному) доказательству, приведенному в приложении).

В книге уделено большое внимание толкованию более ранних авторов; заканчивается книга детальными и блестящими историческими замечаниями, которые вносят большой вклад в историю экономической мысли.

K. J. Arrow

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 706—707.

7 В109 Д. Об одной математической модели в исследовании операций. Chorafas Dimitris N. Sur un modèle mathématique d'analyse de gestion. «Thèse doct. Univ., Fac. sci. Univ. Paris», 1958, 63 p., ill. (франц.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Редактор *Р. Л. Добрушин*

7 В110. Использование статистических методов в выяснении основных закономерностей. Box G. E. P. Use of statistical methods in the elucidation of basic mechanisms. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 215—225 (англ.; рез. франц.)

При экспериментальном исследовании функционального соотношения

$$\eta = f(\xi, \theta),$$

где через ξ и θ обозначены переменные и параметры, различаются три этапа: а) выбор наиболее важных переменных, б) эмпирическое изучение важнейших свойств функционального соотношения, в) теоретические изучения возможных закономерностей, могущих описывать изученные

события. В настоящей работе изучен детально третий этап. Иногда в ходе эксперимента устанавливается закономерность, из которой можно вывести функциональное соотношение $\eta = f(\xi, \theta)$. (Например, такая закономерность может задаваться дифференциальным уравнением, которому удовлетворяет функциональное отношение). При изучении наблюденных событий возникают проблемы статистического анализа и проблемы планирования эксперимента. В ходе эксперимента получаются значения η при некоторых значениях переменных ξ и требуется 1) контролировать, верно ли функциональное соотношение $\eta = f(\xi, \theta)$, 2) в случае, когда соотношение $\eta = f(\xi, \theta)$ верно, определить и оценивать приближенно параметры θ, 3) определить доверительные границы для параметров θ. В работе даны методы для выполнения этих требований. При планировании эксперимента надо стараться, чтобы точность определения параметров θ была наибольшая и различие двух возможных закономерностей было явным. Автор дает критерий выбора наилучшего планирования экспериментов. J. Mogyoródi

7 В111. О роли молекулярной диффузии в процессах турбулентной диффузии. Saffman P. G. On the effect of the molecular diffusivity in turbulent diffusion. «J. Fluid Mech.», 1960, 8, № 2, 273—283 (англ.)

При достаточно малых временах диффузии $t - t_0$ полная дисперсия D^2 координаты диффундирующей частицы складывается из дисперсии $\overline{Y}^2$, создаваемой турбулентностью, и дисперсии $2k(t - t_0)$, создаваемой молекулярными процессами (k — коэффициент молекулярной диффузии). При больших $t - t_0$ процессы молекулярной и турбулентной диффузии уже взаимодействуют, и разность $\Delta = D^2 - \overline{Y}^2 - 2k(t - t_0)$ оказывается отличной от нуля. Согласно Бэтчелору и Таунсенду (1956) эта разность положительна и с точностью до слагаемых порядка $(t - t_0)^3$ равна

$$\Delta = \frac{28}{45} k\omega^2 (t - t_0)^3,$$

где ω — средний квадратичный вихрь скорости турбулентного движения. Этот результат оспаривается. Учитывая, что молекулы диффундирующей примеси «забывают» свою начальную скорость конвекции быстрее, чем инфинитезимальные жидкие элементы, следует ожидать, что $\Delta < 0$. Расчет приводит к значению

$$\Delta = -\frac{1}{9} k\omega^2 (t - t_0)^3.$$

Результаты качественно согласуются с измерениями диффузии гелия и углекислого газа, произведенными Миккелсеном (1960). А. С. Монин

7 В112. Об общем распределении энергии при броуновском движении: попытка пространственного описания случайных явлений в соответствии с бергсоновской концепцией науки. Ota Mitsuo, Nakagami Minoru. On the general energy distribution of the Brownian motion: some trials of spatializing the random phenomena according to Berson's view of science. «Proc. 7th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1957». Tokyo, Gakujutsu bunken fukyu-kai, 1958, 317—322 (англ.)

После краткого изложения субъективистских воззрений Бергсона о том, что различие между «динамическим» и «статическим» восприятием явления создается интеллектом (фиксирующим моменты времени и пространственные промежутки), вводится энергия E случайного процесса $f(t)$, как среднее по отрезку времени длины τ значение $f(t)$, предполагается, что E представлено в виде $E_0 + \sum_1^N x_l^2$, где E_0 — постоянное слагаемое, а x_l — случайные величины. Последние из якобы философских соображений предлагается описывать N-мерным гауссовским распределением общего вида, и ставится задача о нахождении распределения вероятностей для E (и для $R = \sqrt{E}$). Квадратичная форма распределения для x_l мыслится, как приведенная к главным осям (так что x_l предполагаются независимыми), и рассматриваются два случая:

$$1)\quad E = \sum_1^N x_l^2; \qquad 2)\quad E = E_0 + \sum_1^N x_l^2,$$

где математические ожидания x_l равны нулю. Для E получается так называемое распределение Бесселя (или Г-распределение) с плотностью вероятностей:

$$P(x) = \frac{1}{s}\left(\frac{x}{B}\right)^{\frac{N-2}{4}} e^{-\frac{x+B}{s}} I_{\frac{N-2}{4}}\left(\frac{2}{s}\sqrt{xB}\right).$$

Выводятся также формулы в виде рядов для случая, когда исходные величины x_l слабо коррелированы. Указываются некоторые возможные физические приложения, в которых подлежат изучению статистические характеристики случайных шумов или броуновских частей.

А. С. Монин

7 В113. Статистико-механическая основа уравнения Больцмана. Kirkwood John G., Ross John. The statistical mechanical basis of the Boltzmann equation. «Proc. Internat. Sympos. Transp. Processes Statist. Mech. Brussels, 1956». New York — London, Interscience, 1958, 1—7. Discuss., 19—24 (англ.)

Исходя из уравнения Лиувилля для плотности вероятностей $f^{(N)}$ в $6N$-мерном фазовом пространстве системы из N молекул, в которой имеются только парные межмолекулярные взаимодействия, дается вывод уравнения Больцмана для сглаженной по времени плотности вероятностей $\overline{f}^{(1)}$ в шестимерном фазовом пространстве одной молекулы.

Это уравнение вначале записывается в виде

$$\frac{\partial \overline{f}^{(1)}}{\partial t} + \frac{p_1}{m_1} \nabla_{R_1} \overline{f}^{(1)} + X_1 \nabla_{p_1} \overline{f}^{(1)} =$$

$$= -\frac{(N-1)}{\tau} \int_0^{\tau} \dots \int F_{12} \cdot \nabla_{p_1} K^{(2)}(s) f^{(2)}(t)\, dR_2\, dp_2\, ds \times$$

$$\times\, dR_1'\, dR_2'\, dp_1'\, dp_2',$$

где F_{12} — сила парного взаимодействия, $f^{(2)}$ — частная функция распределения для пары молекул, $K^{(2)}$ — ядро, осуществляющее преобразование функции $f^{(2)}$ от одной точки фазового пространства и времени к другой. Из правой части указанного уравнения выделяется слагаемое, содержащее вместо $f^{(2)}$ произведение частных функций распределения для двух молекул, и допускается, что остаток при достаточно большом интервале τ сглаживания по времени может быть сделан сколь угодно малым (что является математической формулировкой одного из требований гипотезы о молекулярном хаосе). Для $K^{(2)}$ из уравнения Лиувилля выводится соответствующее интегро-дифференциальное уравнение (аналогичное указанному уравнению для $f^{(2)}$), которое решается после пренебрежения его правой частью (что допустимо в пределе при бесконечно малой плотности газа) и при условии квазистационарности внешних сил. После этого правая часть уравнения для $f^{(2)}$ вычисляется с точностью до слагаемых первого порядка относительно градиентов в фазовом пространстве, и интегралы берутся так же, как в работе Кирквуда (Kirkwood J. G., J. Chem. Phys, 1946, **14**, 180). В результате получается уравнение Больцмана. А. С. Монин

7 В114. О статистической механике неравновесных явлений. Uhlhorn U. On statistical mechanics of non-equilibrium phenomena. «Arkiv fys.», 1960, **17**, № 3-4, 193—232 (англ.)

Рассматривается классическая система с конечным числом f степеней свободы, на фазовом пространстве $Z=\{\zeta\}$ которой определена мера Лиувилля $h^{-f}dp_1\ldots dq_f$ (в статье последовательно приводятся также все аналогичные формулировки для квантово-механических систем). Уравнениям Гамильтона соответствует группа точечных преобразований $u(t)$ на Z, сохраняющих меру. Задано также сохраняющее меру инволюционное преобразование τ, соответствующее обращению времени: $\tau(u)t=u(-t)\tau$. Тем самым на алгебре ограниченных комплексных функций $x(\zeta)$ индуцируется группа изоморфизмов $U(t)$ и изоморфизм T, оставляющие инвариантным интеграл S от фазовых функций на Z по мере Лиувилля. Пусть макроскопические наблюдения суть измерения значений $A=(A^1,\ldots,A^n)$ некоторых фазовых функций $a=(a^1,\ldots,a^n)$. Пусть $I(i)=I^1(i^1)\ldots I^n(i^n)$, где i^μ — интервалы числовой прямой, а $I^\mu(i^\mu)$ — фазовая функция, равная 1 при $A^\mu\in i^\mu$ и 0 в противоположном случае. Вводятся структурные функции

$$V(i^1\ldots i^k;\ t_1,\ldots,t_k;\ A)=S[U(t_1)I(i^1)]\ldots[U(t_k)I(i^k)]$$

— неотрицательные аддитивные функции множеств в kn-мерном евклидовом пространстве. Рассматривается идеализированный эксперимент, заключающийся в измерении неограниченной в обе стороны последовательности $(\ldots A_{-1},A_0,A_1,\ldots)$ значений n-мерной фазовой функции a в моменты $(\ldots-1,0,1,\ldots)$. На множестве $\Omega=\{\omega\}$ всевозможных таких последовательностей (фазовое пространство эксперимента) структурные функции индуцируют неограниченную меру μ, инвариантную относительно преобразования u, определяемого соотношением $(u\omega)_k=\omega_{k+1}$ и преобразования τ. Пространство Ω распадается на эргодические классы конечной меры, соответствующие различным значениям некоторых «интегралов макроскопического движения» (одним из них является макроскопическая энергия). Эти интегралы определяют, в частности, макроскопическое состояние равновесия. Тем самым структура пространства Ω оказывается эквивалентной классу стационарных эргодических случайных процессов, обладающих симметрией относительно обращения времени, каждый из которых описывает флюктуации макроскопических величин в данном состоянии равновесия. При произвольном начальном состоянии приближение к состоянию равновесия описывается соответствующим условным случайным процессом. А. С. Монин

7 В115. Об основах линейной теории необратимых процессов. I. Uhlhorn U. On the foundations of the linear theory of irreversible processes. I. «Arkiv fys.», 1960, **17**, № 3-4, 257—272 (англ.)

Рассматривается система, состояние которой характеризуется n термодинамическими переменными $A(t)=\alpha=(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$, преобразующимися при обращении направления движения по закону $T^\mu_\nu\alpha^\nu$. Наложенные на систему внешние ограничения (замкнутость, адиабатическая изолированность и др.) записываются в виде $A^\mu(t)={}^0\alpha^\mu$ $(\mu=m+1,\ldots,n)$, и предполагается, что при этих ограничениях система имеет единственное равновесное состояние, в котором свободные переменные равны нулю. Вводится термодинамический потенциал системы — энтропия S, являющаяся функцией свободных переменных, достигающей максимума в равновесном состоянии и инвариантной относительно преобразования T^μ_ν. При малых $\alpha^1,\ldots,\alpha^m$ энтропия имеет вид $S(\alpha)=S(0)-\frac{1}{2}s_{\mu\nu}\alpha^\mu\alpha^\nu$, где $s_{\mu\nu}$ — положительно определенная матрица. После введения термодинамических сил $\xi_\mu=-s_{\mu\nu}\alpha^\nu_z$ уравнения для системы записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\alpha^\mu(t)=L^{\mu\nu}\xi_\nu(t),$$

где $L^{\mu\nu}$ — постоянная несингулярная неотрицательная матрица, удовлетворяющая соотношением Онзагера $T^\lambda_\mu L^{\mu\nu}=T^\nu_\mu L^{\mu\lambda}$. В пространстве векторов $(\alpha^1,\ldots,\alpha^m)$ вводится скалярное произведение и в получающемся гильбертовом пространстве рассматриваются операторы s, T, L с матрицами $s_{\mu\nu}, T^\nu_\mu, L^{\mu\nu}$. Вводится оператор $M=Ls$ и полугруппа операторов $Q(t)=\exp(-tM)$, соответствующая феноменологическим уравнениям. Ставится задача изучить асимптотическое поведение этой полугруппы при больших t. Устанавливается, что $Q(t)$ распадается на прямую сумму двух полугрупп $Q_0(t)+Q_1(t)$, причем $Q_0(t)\to 0\,(t\to\infty)$ (соответствующие процессы необратимы и приводят в максимальной продукции энтропии), а $Q_1(t)$ соответствует обратимым процессам без продукции энтропии. В соответствии с этим каждое начальное состояние системы однозначно представляется в виде линейной суперпозиции двух состояний, одно из которых приводит к необратимому, а другое — к обратимому процессу. Для необратимых процессов в открытой системе (при фиксированных силах $\xi_1(t),\ldots,\xi_l(t)$, $0\leqslant l\leqslant m$) вводится понятие диссипативных функций, зависящих только от состояния системы, монотонно убывающих со временем и характеризующих приближение системы к асимптотическому состоянию, определяемому лишь внешними ограничениями и не зависящему от начального состояния системы (такой функцией, в частности, может быть продукция энтропии). А. С. Монин

7 В116. Об основах линейной теории необратимых процессов. II. Uhlhorn U. On the foundations of the linear theory of irreversible processes. II. «Arkiv fys.», 1960, **17**, № 3-4, 273—314 (англ.)

Излагается вероятностная интерпретация линейной феноменологической теории необратимых процессов, развитой в первой части работы (реф. 7В115). Предварительно вводится понятие о гильбертовом пространстве случайных величин с конечной дисперсией, в котором скалярным произведением двух случайных величин является математическое ожидание произведения одной из них на комплексно сопряженную ко второй, и дается краткий очерк основных понятий теории случайных процессов. Состояние термодинамической системы характеризуется m свободными термодинамическими переменными, образующими векторы m-мерного пространства V. Изменения состояния во времени описываются с помощью стационарного случайного процесса $x(t)$ со значениями из V, корреляционная функция которого имеет вид $R(t)=s^{-1}Q(t)^*$, где s — оператор энтропии (постоянная Больцмана полагается равной единице), а $Q(t)=\exp(-tM)$ — оператор, соответствующий феноменологическим уравнениям для системы ($M=Ls$, где L — оператор, соответствующий матрице феноменологических коэффициентов). При этом процесс $x(t)$ оказывается решением обобщенного уравнения Ланжевена

$$dx(t)=-Mx(t)\,dt+[R(0)M^*+MR(0)]^{\frac{1}{2}}Z(dt),$$

которое отличается от феноменологического уравнения для системы наличием чисто случайного слагаемого. Пусть Π_t — ортогональная проекция оператора симметрии процесса $x(t)$ (т. е. оператора, действующего на аргумент процесса и не меняющего его корреляционной функции; таковыми являются сдвиги и перемена направления на оси времени) на подпространство, натянутое на значения процесса в моменты, меньшие t. Процесс,

для которого $\Pi_{-\infty} = \Pi_{+\infty}$, называется детерминистическим; для такого процесса $\Pi_{t_1} = \Pi_{t_2}$ при любых t_1, t_2. Если $\Pi_{-\infty} = 0$, процесс называется недетерминистическим. Процесс $x(t)$ может быть представлен в виде линейной суперпозиции детерминистического процесса $x_0(t)$ и недетерминистического процесса $x_1(t)$, причем $R(t) = R_0(t) + R_1(t)$. Сингулярные компоненты (дискретная и непрерывная) спектральной функции процесса $x(t)$ соответствуют детерминистическому слагаемому, а абсолютно непрерывная часть, вообще говоря, — и детерминистическому и недетерминистическому слагаемому. Устанавливается, что детерминистическое слагаемое соответствует обратимому, недетерминистическое — необратимому термодинамическому процессу. В заключение рассматривается случай, в котором $x(t)$ есть гауссовский процесс с независимыми приращениями, и показывается, что соответствующая характеристическая функция

$$C(t, v) = E \exp\{i(x(t), v) | (x(0), v)\};\ v \in V,$$

удовлетворяет уравнению в частных производных, являющемуся преобразованием Фурье уравнения Фоккера—Планка, которое может служить отправной точкой для обобщения статистической теории необратимых процессов на случай нелинейных феноменологических уравнений. А. С. Монин

7 В117. Функции распределения в квантовой статистической физике. Ayres R. U. Distribution functions and quantum statistics. «Phys. Rev.», 1960, **120**, № 5, 1557—1571 (англ.)

Путем интегрирования уравнения Блоха $-\partial\Gamma/\partial\beta = H\Gamma$ для матрицы плотности $\Gamma = \exp\{-\beta H\}$ ($\beta = 1/kT$ — обратная температура, $H = \sum_{i=1}^{N} T_i + \sum_{i<j} V_{ij}$ — оператор Гамильтона для N взаимодействующих частиц) по переменным $N-1, N-2, \ldots$ частиц системы получена цепочка зацепляющихся уравнений для одно, двух,... частичных статистических операторов $\gamma(1)$, $\gamma(1, 2)$ и т. д. Так как гамильтониан системы включает только парное взаимодействие, то для физических приложений важно знать только $\gamma(1)$ и $\gamma(1, 2)$. С целью оборвать цепочку и сделать систему замкнутой относительно этих операторов предлагается заменить входящие в уравнение для $\gamma(1)$ операторы $\gamma(1, 2)$ и $\gamma(1, 2, 3)$ на симметризованные (или антисимметризованные в случае статистики Ферми) произведения пар или троек одночастичных операторов, в уравнении для $\gamma(1, 2)$ заменить трехчастичный оператор $\gamma(1, 2, 3)$ на $\gamma(1, 2)\gamma(2, 3)\gamma(3, 1)$, а оператор $\gamma(1, 2, 3, 4)$ — на произведение восьми двухчастичных операторов. В уравнении для $\gamma(1)$ в его нелинейной части вместо взаимодействия V_{12} вводится оператор K, который, сохраняя вид нелинейности, переводит все $\gamma(i)$ в известные одночастичные операторы для системы без взаимодействия. Для этого оператора и для преобразования Лапласа оператора $\gamma(1)$ получены уравнения типа уравнений для функций Грина в квантовой задаче многих тел. И. А. Квасников

7 В118. Замечание о теоретико-информационной форме принципа неопределенности. Bourret Richard. A note on an information theoretic form of the uncertainty principle. «Inform. and Control», 1958, **1**, № 4, 398—401 (англ.)

Автор выводит как следствие из результатов Хершмана (РЖМат, 1958, 5833), что при

$$\psi(r) = h^{-1/2} \int e^{2\pi i r s/h} \chi(s)\, ds,$$

$$\chi(s) = h^{-1/2} \int e^{-2\pi i r s/h} \psi(r)\, dr,$$

$$-\int |\psi(r)|^2 \log|\psi(r)|^2\, dr - \int |\chi(s)|^2 \log|\chi(s)|^2 ds \geqslant \log h,$$

где h — постоянная Планка, и рассматривает это неравенство как одну из форм принципа неопределенности Гейзенберга. Р. Л. Добрушин

7 В119. Теория информации и расходящиеся интегралы в физике. Brillouin L. Information theory and the divergent sums in physics. «Ann. Phys. (USA)», 1958, 5, № 3, 243—250 (англ.)

Автор ставит своей целью объяснить с помощью «информации о неопределенности системы» метод введения множителя $e^{-(\beta/r)}$ в расходящиеся интегралы, используемые в физике. Ю. Н. Благовещенский

7 В120. Новые модели распределений и случайных процессов. Maravall Casesnoves Darío. Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocásticos. «Rev. Real acad. cienc. exact., fís. y natur. Madrid», 1958, 52, № 3, 413—556 (исп.)

Рассматриваются некоторые новые случайные процессы, связанные с вопросами физики и биологии, и исследуются математические свойства соответствующих распределений (ср. работу автора, РЖМат, 1958, 6049). Строятся законы распределения, характеристические функции и моменты для сумм, произведений, частных и других функций фиксированного и случайного числа случайных величин как независимых, так и коррелированных, а также интегралов от случайных величин со случайными пределами, и с помощью применения преобразований Меллина исследуются вопросы, касающиеся их сходимости и устойчивости. Исследуется ряд других вопросов теории вероятностей — свойства периодических случайных величин, изотропные распределения случайных векторов в евклидовых пространствах, суперпозиция случайных величин; показывается возможность существования для стохастических распределений соотношений неопределенности, обобщающих соотношения Гейзенберга из квантовой механики. Полученные результаты применяются к различным вопросам статистики, физики и биологии (распределение минимального и максимального числа элементов в случайной выборке, различные случаи броуновского движения, газовая кинетика, генетика популяций и др.). М. Ф. Бокштейн

7 В121. Радиальное распределение атомов в жидкости. Евсеев А. М. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 4, 789—792

Вводится условная вероятность осуществления конфигурации двух частиц жидкости в положении r_1, r_2 при условии, что их центры равновесия находятся в точках r_1^0, r_2^0. Предполагается, что среда является изотропной. В этом случае упомянутая условная вероятность зависит только от расстояния между двумя частицами и между их центрами равновесия. Цель настоящей работы определить плотность этой условной вероятности $k(r/r_0)$. Автор показывает, что функция $x(r/r_0)$ удовлетворяет некоторому интегральному уравнению. Конкретный расчет $k(r/r_0)$ зависит от возможности пренебречь связями между частицами. Вычисление $k(r/r_0)$ выполняется для одной специальной модели. J. Mogyoródi

7 В122. Волноводы со случайными неоднородностями и броуновское движение в плоскости Лобачевского. Герценштейн М. Е., Васильев Б. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, **4**, № 4, 424—432 (рез. англ.)

Рассматривается цилиндрический волновод со статистически независимыми случайными неоднородностями, каждая из которых характеризуется случайной величиной r_l — коэффициентом отражения (т. е. отношением амплитуд отраженной и прямой волн). Ставится задача об определении статистических характеристик полного коэффициента отражения R всего волновода по известным статистическим характеристикам случайных величин r_l. Устанавливается, что суммарный коэффициент отражения двух неоднородностей выражается через их

коэффициент отражения по формуле

$$r = \frac{r_1 + r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}}{1 + r_1^* r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}},$$

где $r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}$ — коэффициент отражения второй неоднородности, пересчитанный в точку расположения первой неоднородности (фаза коэффициента отражения зависит от выбора плоскостей отсчета фаз падающей и отраженной волн). Каждая неоднородность интерпретируется как точка в комплексной плоскости r (называемой диаграммой импедансов). При движении по волноводу от нагрузки к генератору действие каждой последовательной неоднородности приводит к перемещению точки на диаграмме импедансов, изображающей суммарный коэффициент отражения всех уже пройденных неоднородностей, причем это перемещение осуществляется дробно-линейным преобразованием диаграммы, сохраняющим на ней единичный круг (так как $|r|<1$). Поэтому движение изображающей точки при указанном процессе трактуется как броуновское движение в плоскости Лобачевского, описываемое уравнением Колмогорова, инвариантным относительно дробно-линейных преобразований:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D\Delta w,$$

где Δ — оператор Лапласа в плоскости Лобачевского, z — координата вдоль волновода, $D = \sum \left| r_i^2 \right| /4z$. Отсюда определяется плотность вероятности w, с ее помощью находится среднее значение неевклидова расстояния $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$ изображающей точки от центра диаграммы импедансов, как функция от $t = \int Ddz$, и получается соотношение

$$|r| \approx (1 - e^{-4t})^{1/2}.$$

В заключение указывается, как в уравнении Колмогорова для броуновского движения в плоскости Лобачевского можно учесть наличие потерь в волноводе.

А. С. Монин

7 В123. Определение вероятностных характеристик трехмерного волнения моря. Свешников А. А. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр.», 1959, № 3, 32—41

Изучаются вероятностные свойства отклонения $\zeta(x, y, t)$ поверхности моря от равновесного состояния. Функция ζ выражается через потенциал $u(x, y, z, t)$ скорости частицы воды в данной точке моря, который удовлетворяет уравнению Лапласа и некоторым граничным условиям. Это уравнение решается при начальных условиях

$$u(x, y, 0, 0) = F_1(x, y); \quad \left[\frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = F_2(x, y),$$

где F_1 и F_2 — некоторые стационарные случайные функции. Используя спектральное разложение двумерных стационарных случайных функций, автор получает выражение потенциала u и функции ζ в виде стохастических интегралов. Рассматривается возможность получения соответствующих спектральных характеристик экспериментальным путем. Даны практические методы обработки экспериментального материала. Е. А. Бавров

7 В124. Изучение ограниченного случайного блуждания. Lehman R. Sherman, Weiss George H. A study of the restricted random walk. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1958, **6**, № 3, 257—278 (англ.)

Рассматривается случайное блуждание по прямоугольной решетке с постоянным шагом, направленным с равной вероятностью в любую из точек, еще не посещавшихся ранее. Показано, что такое блуждание на плоскости заканчивается с вероятностью единица. Утверждается, что этот же результат имеет место в любом конечномерном пространстве. Доказано также, что вероятность P_n окончания блуждания на n-м шаге убывает показательно с ростом n. Отсюда легко следует, что математическое ожидание числа шагов до окончания блуждания конечно. Экспериментально на вычислительной машине получены оценки для числа случайных блужданий длиной n шагов и среднеквадратической длины n-членных цепочек. Рассматриваемое случайное блуждание может быть использовано в качестве модели при изучении свойств полимеров. В. С. Королюк

7 В125. Относительно экспериментальных формул одновременного анализа. Iwamaga M., Onishi R. An illustration of experimental formula for simultaneous determination. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1959, **6**, № 2, 63—66 (англ.)

Пример применения метода наименьших квадратов в химии. Р. Л. Добрушин

7 В126. Класс определений «длительности» (или «неопределенности») и соответствующее соотношение неопределенности. Zakai Moshe. A class of definitions of «duration» (or «uncertainty») and the associated uncertainty relations «Inform. and Control.», 1960, **3**, № 2, 101—115 (англ.)

Автор определяет «временную длительность» функции $f(t)$, принадлежащей $L^2(-\infty, +\infty)$ и $L^p(-\infty, +\infty)$, $(p > 0)$, с помощью соотношения

$$\tau_p[f(t)] = \left(\frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{2p}{p-2}}.$$

При $p = \infty$ получается известная в теории шумов величина $\tau_\infty[f(t)] = \left[\int |f(t)|^2 dt\right] [\max |f(t)|]^{-2}$, а при $p = 0$ величина τ_0 является мерой множества точек, где $f(t) \neq 0$. Случай $p = 2$ рассмотрен в работах Хершмана (РЖМат., 1958, 5833), Бурре (реф. 7В118), Лейпника (Leipnik R., Inform. and Control, 1959, 2, 64—79). Выражение для τ_p может быть записано с помощью среднего значения $M_r[f]$ функции $f(t)$, введенного Харди, Литлвудом и Полиа следующим образом

$$M_r(f) = \left[\int |f(t)|^{r+2} dt\right]^{1/r} \left[\int |f(t)| dt\right]^{-\frac{1}{r}}.$$

Исследуются свойства введенной величины. Доказывается следующая теорема: Пусть t_k — случайные моменты времени, задаваемые процессом Пуассона со средним количеством моментов на единицу времени $\bar{n}$ и $F_{\bar{n}}(x)$ — распределение вероятностей для суммы $\sum_k f(t - t_k)$. Тогда

$$|F_{\bar{n}}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\bar{n}\,\tau_3(f(t))}},$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения, а c не зависит от $f(t)$ и $\bar{n}$. Аналогично длительности τ_p вводится понятие о ширине $\theta_p[f(t)]$ спектральной плотности $g(\omega)$ функции $f(t)$. Доказывается следующая теорема, формулирующая известный принцип неопределенности: Если выполнено условие $p^{-1} + g^{-1} \geqslant 1$ $(p \geqslant 0, g \geqslant 0)$, то $\tau_p(f)\,\theta_p(f) \geqslant 1$, если же $p^{-1} + g^{-1} < 1$, то нижняя грань произведения $\tau_p \cdot \theta_g$ равна нулю. Указывается на возможность использования введенных понятий в теории синтеза антенн. Рассматривается обобщение на случай функций $f(t_1 \ldots t_m)$ многих переменных. В. П. Яковлев

7 В127. О спектральном методе расчета нестационарных случайных процессов. Лебедев В. Л. «Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника», 1959, № 2, 27—31

Пусть $x(t)$ — нестационарный процесс с корреляционной функцией $k(t_1, \tau) = M\{x(t)\,x(t+\tau)\}$, $\tau = t_2 - t_1$. Вводится понятие мгновенной спектральной плотности

$$F(\Omega, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K(t, \tau)\, e^{-i\Omega\tau} d\tau$$

и спектральной плотности

$$G(\Omega, \omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega, t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Эти понятия используются для вычисления переходных режимов в линейных системах вида

$$A_t y(t) = B_t x(t),$$

где

$$A_t = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \ldots + a_0,\ B_t = b_m \frac{d^m}{dt^m} + \ldots + b_0,$$

$x(t)$ — случайный сигнал на входе системы, а $y(t)$ — сигнал на выходе этой системы. Ю. К. Беляев

Примечание редакции. Физический смысл введенных автором определений не ясен, поскольку из-за того, что $k(t, \tau)$, как функция от τ, вообще говоря, не является положительно определенной функцией, вводимые автором спектральные функции могут не быть неотрицательными.

7 В128. О случайных процессах, обладающих нестационарностью периодического характера. Лебедев В. Л. «Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника», 1959, № 2, 32—34

Продолжение работы автора (реф. 7В127). Предполагается, что корреляционная функция $K(t, \tau)$ является периодической по t. В этом случае мгновенная спектральная плотность разлагается в ряд Фурье. Далее рассмотрена задача о прохождении таких процессов через линейные системы того же вида, что и в указанной статье. Ю. К. Беляев

7 В129. Энергетический спектр неопределенного интеграла стационарного случайного процесса. Левин Б. Р. «Радиотехника», 1960, 15, № 6, 19—21

Устанавливается связь между энергетическими спектрами процессов

$$\eta_T(t) = \int_{-T}^{t} \xi(t)\, dt$$

и $\xi(t)$, где $\xi(t)$ — стационарный процесс с корреляционной функцией

$$B_\xi(\tau) = \int e^{i\tau\omega} F_\xi(\omega)\, d\omega.$$

Известно, что под мгновенным энергетическим спектром нестационарного случайного процесса $\eta_T(t)$ подразумевают величину

$$G_{\eta_T}(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} M\,|\,S_{\eta_T}(t, \omega)\,|^2,$$

где

$$S_{\eta_T}(t, \omega) = \int_{-T}^{t} \eta_T(t_1)\, e^{-i\omega t_1}\, dt_1.$$

А под средним энергетическим спектром — величину

$$F_\eta(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} G_{\eta_T}(t, \omega)\, dt.$$

В предположении $F_\xi(0) = 0$ выводится формула

$$F_\eta(\omega) = \frac{1}{\omega^2} F_\xi(\omega).$$

Отмечается, что эта формула применяется в технической литературе, но без указания ограничения $F_\xi(0)=0$. А. Н. Ширяев

7 В130. Об одном классе нестационарных случайных функций, сводящихся к стационарным. Карпеев Г. А. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 6, 106—111

Рассматривается случайный процесс $X(t) = x(t) + \varphi(t)$, где $x(t)$ — стационарный гауссовский процесс со средним m_x, дисперсией σ_x^2 и корреляционной функцией $f_x(\tau)$, а $\varphi(t)$ — неслучайная функция, предполагаемая четной или нечетной. В случае четной функции $\varphi(t)$ очевидным образом устанавливаются формулы

$$m_\xi = 0,\ f_\xi(t, t+\tau) = 2\,[f_x(\tau) + f_x(2t+\tau)],$$

где $\xi(t) = X(t) - X(-t)$, m_ξ и $f_\xi(t, s)$ — среднее и корреляционная функция процесса $\xi(t)$. Из этих формул следует, что при достаточно быстро убывающей функции $f_x(\tau)$ и $t \gg \tau$

$$\sigma_\xi^2 \sim 2\sigma_x^2,\ f_\xi(t, t+\tau) \sim 2 f_x(\tau).$$

Это замечание предлагается использовать для построения оценок дисперсии σ_x^2 и корреляционной функции $f_x(\tau)$ процесса $x(t)$, воспользовавшись эмпирическими дисперсией и корреляционной функцией процесса $\xi(t)$. Аналогично разбирается случай нечетных функций $\varphi(t)$.

Примечание референта. Автор ошибочно полагает, что требование эргодичности процесса $x(t)$ «не накладывает никакого ограничения» на его спектр. Хорошо известно, что гауссовский стационарный процесс эргодичен тогда и только тогда, когда его спектральная функция непрерывна. А. Н. Ширяев

7 В131. Среднеквадратическая ошибка при представлении случайных функций конечными суммами. Brown J. L., Jr. Mean square truncation error in series expansions of random functions. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, 8, № 1, 28—32 (англ.)

С каждой случайной функцией $x(t)$, определенной на конечном интервале $[a, b]$, можно связать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$, где $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность ортонормированных функций на $[a, b]$ и

$$a_n = \int_a^b x(t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

Рассматривается среднеквадратическая ошибка

$$\varepsilon_N[\{\varphi_n\}] = M\left[\int_a^b \left\{x(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(t)\right\}^2 dt\right]$$

и ставится вопрос о выборе функций $\varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, минимизирующих $\varepsilon_N[\{\varphi_n\}]$. Для непрерывного в среднем квадратическом процесса $x(t)$ с функцией ковариации $R(s, t)$ приводится простое доказательство теоремы, впервые полученной Жорданом: Величина $\varepsilon_N[\{\varphi_n\}]$ минимальна, если φ_n, $n = 1, \ldots, N$, являются ортонормированными собственными функциями интегрального уравнения Фредгольма

$$\lambda \int_a^b R(s, t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(s),$$

соответствующими собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ таким, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$. Установлено выражение для минимальной ошибки

$$\varepsilon_N[\{\varphi_n\}] = \int_a^b Mx^2(t)\,dt - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}.$$

А. Н. Ширяев

7 В132. О спектре среднеквадратической погрешности. Szulkin P. On the mean square error spectrum. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn.», 1960, **8**, № 3, 145—147 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается прохождение суммы сигнала $S(\omega)e^{i\omega t}$ и шума $N(\omega)e^{i\omega t + i\varphi(t,\omega)}$ через линейный фильтр с частотной характеристикой $G(\omega)e^{i\alpha(\omega)}$. С помощью простых выкладок автор находит усредненный по времени квадрат разности между входом и выходом фильтра.

В. П. Яковлев

7 В133. Об одном методе вычисления корреляционной функции на выходе нелинейной системы. Тепляков И. М. «Радиотехника», 1960, **15**, № 1, 35—37

Рассматривается нелинейная система, на вход которой подается стационарный гауссовский шум $U(t)$. Утверждается, что корреляционная функция сигнала $I(U(t))$ на выходе с точностью до константы (определяемой через параметры шума и самой нелинейной системы) равна постоянной составляющей спектра на выходе, который возникает, если на вход подается сумма двух определенных (зависящих от параметров шума) синусоидальных колебаний. (Доводы, выдвигаемые автором в пользу этого вывода, остались референту неясными). Полученным методом вычисляется корреляционная функция на выходе следующих конкретных нелинейных устройств:

1. Линейного детектора:

$$I(U) = \begin{cases} U, & U > 0, \\ 0, & U < 0, \end{cases}$$

2. Идеального ограничителя:

$$I(U) = \begin{cases} \beta, & U > 0, \\ 0, & U < 0, \end{cases}$$

3. Устройства со степенной характеристикой:

$$I = mU^n.$$

Е. Г. Николаев

7 В134. Оптимальное линейное предыскажение и корректирование сигнала при передаче его по многопутевой системе. Овсеевич И. А., Пинскер М. С. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1959, № 2, 49—59

Рассматривается следующая схема передачи. Сигнал $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс — передается по n различным каналам. На входе каждого канала устанавливается линейное предыскажающее устройство с коэффициентом передачи $k_i(\omega)$ (i — номер канала), которое преобразует сигнал $\xi(t)$ в $\eta_i(t)$. Предполагается, что сигнал $\eta_i(t)$ подвергается в канале линейному преобразованию, обусловленному коэффициентом передачи канала $l_i(\omega)$, и искажается некоррелированным с ним аддитивным шумом $\zeta_i(t)$. При этом все $\zeta_i(t)$ — стационарные и стационарно связанные случайные процессы. Далее выходной сигнал $\eta_i'(t)$ подвергается линейному преобразованию корректирующего устройства с коэффициентом передачи $m_i(\omega)$, после чего выходные канальные сигналы суммируются, образуя выходной сигнал $\xi'(t)$. Средние значения всех случайных процессов предполагаются равными нулю. Первая задача, которая решается в работе, состоит в нахождении таких функций $m_i(\omega)$ и $k_i(\omega)$, которые при фиксированных средних мощностях входных сигналов

$$P_i = \int f_{\eta_i\eta_i}(\omega)\,d\omega \quad (i = 1, \ldots, n)$$

обеспечили бы минимум величины $\sigma^2 = M|\xi(t) - \xi'(t)|^2$. Здесь $f(\omega)$ обозначает спектральные и взаимные спектральные плотности процессов, соответствующих подстрочечным индексам. Вычисление экстремальных функций $k_i(\omega)$ производится в трех частных случаях:

1) $k_i(\omega) = k(\omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$;

2) $P_i = P$, $l_i(\omega) = l(\omega)$, $f_{\zeta_i\zeta_i}(\omega) = f_{\zeta\zeta}(\omega)$, $f_{\zeta_i\zeta_j}(\omega) = f_{\zeta_1\zeta_2}(\omega)$ и $f_{\zeta_i\zeta_j}(\omega)$ вещественны $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n)$;

3) $f_{\zeta_i\zeta_j}(\omega) = 0$ $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n)$.

Вторая задача состоит в нахождении таких $k_i(\omega)$ и $m_i(\omega)$, которые бы максимизировали отношение средней мощности составляющей входного сигнала, содержащейся в выходном сигнале, к средней мощности составляющей шума в нем. При этом предполагается, что спектральная плотность составляющей сигнала на выходе есть $q(\omega)f_{\xi\xi}(\omega)$, где $q(\omega)$ — заданная фиксированная функция. Решение этой задачи проводится аналогично решению предыдущей задачи. В начале отыскиваются экстремальные $m_i(\omega)$ при фиксированных $k_i(\omega)$. Затем для частных случаев 1) и 3), описанных выше, находятся выражения для искомых $k_i(\omega)$.

Б. С. Цыбаков

7 В135. Одномерная и двумерная плотность распределения суммы синусоидальной волны со случайной фазой плюс гауссовский шум. Leipnik Roy. First and second order distributions of a sine wave of random phase plus Gaussian noise. «Z. angew. Math. und Phys.», 1960, **11**, № 2, 117—126 (англ.; рез. нем.)

Пусть $x(t) = p\cos(\omega t + \theta) + y(t)$, где $y(t)$ — гауссовский стационарный процесс с $a(\tau) = My(t)\,y(t+\tau)$, а фаза θ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$ и независима от $y(t)$. Одной из важных задач в теории обнаружения является нахождение удобных формул для одномерной и двумерной плотностей $p(x_1)$ и $p(x_1, x_2)$ процесса $x(t)$. Приводятся точные формулы для $p(x_1)$ и $p(x_1, x_2)$ в виде рядов, содержащих функции Бесселя I_n. Так, например,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a(0)}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{4a(0)}\right) \times$$

$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q I_{2q}\left(\frac{px}{a(0)}\right) I_q\left(\frac{p^2}{4a(0)}\right).$$

А. Н. Ширяев

7 В136. Общая функция распределения для синусоиды плюс гауссовский шум. Levine A., McGhee R. B. Cumulative distribution functions for a sinusoid plus Gaussian Noise. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 2, 90—91 (англ.)

Приводится таблица функции

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\operatorname{erf}\{(1+r)^{1/2}y - (2r)^{1/2}\cos\theta\} -$$

$$- \operatorname{erf}\{-(2r)^{1/2}\cos\theta\}]\,d\theta$$

для $y = 0{,}0 - 4{,}0$ с интервалом 0,1 и $A = 0{,}0$; 0,20; 0,50; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20, ∞, позволяющая вычислять распределение суммы $A\sin(\omega t + \varphi) + n(t)$, где $n(t)$ имеет гауссовское, а φ — равномерное распределение, и φ и $n(t)$ независимы.

Р. Л. Добрушин

7 В137. Два замечания об одном марковском процессе огибающей. Helstrom Carl W., Isley C. T. Two notes on a Markoff envelope process. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 3, 139—140 (англ.)

В статье Пирса (РЖМат, 1961, 1В—193) показано, что огибающая тока на выходе RLC-фильтра, с боль-

шим коэффициентом добротности, является марковским процессом. Первый из авторов дает простое доказательство этого факта с помощью уравнения Фоккера—Планка. Кроме этого, вычисляется плотность вероятности того, что рассматриваемая огибающая пересекает данный уровень первый раз в момент времени t. Второй из авторов указывает, что рассуждения, проведенные Пирсом, могут быть значительно обобщены. J. Mogyoródi

7 В138. О свойствах огибающей стационарного случайного процесса. Бункин Ф. В. «Радиотехн. и электроника», 1960, **5**, № 9, 1555—1556

Обращается внимание на то, что если стационарный случайный процесс $\xi(t)$ представим в виде $\xi(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$, где огибающая $A(t)$ — стационарный процесс, а одномерное условное распределение $\omega_\theta(\theta/_A)$ фазы θ при фиксированном значении A (в один и тот же момент времени) не зависит от t, то одномерное распределение $w_\xi(x)$ исходного процесса $\xi(t)$ симметрично: $w_\xi(x) = w_\xi(-x)$. Выводится следующая формула, связывающая моменты $\overline{A^{2m}}$ и $\overline{\xi^{2m}}$ порядка $2m$ для процессов $A(t)$ и $\zeta(t)$ симметричной $w_\xi(x)$:

$$\overline{A^{2m}} = \frac{2^{2m}(m!)^2\,\overline{\xi^{2m}}}{(2m)!}.$$

В. П. Яковлев

7 В139. Разделение сигналов по форме. Самойлов А. И. Изв. высш. учебн. заведений. «Радиотехника», 1958, № 5, 584—588

Автор рассматривает совокупность линейно независимых сигналов

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} V_{kj}\sin(\omega_j t + \psi_{kj}),\quad \sum_{j=1}^{n} V_{kj}^2 = \text{const},$$

$$V_{kj} \neq 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

имеющих одинаковый спектр, но соответствующих разным точкам на сфере $\sum_{j=1}^{n} V_{kj}^2 = \text{const}$. Предлагается метод различения таких сигналов при приеме. Для передачи телеграфных сообщений грубо оценивается вероятность ошибочного приема.

Ю. Н. Благовещенский

7 В140. К теории разнесенного приема при дальнем тропосферном распространении УКВ. Просин А. В., Губский В. Ф. «Радиотехника», 1959, **14**, № 5, 23—33

Ищутся приближенные формулы для корреляционной функции сигналов, возникающих при рассеянии радиоволн на анизотропных турбулентных неоднородностях тропосферы. Ю. Н. Благовещенский

7 В141. Перекрестные шумы, возникающие в радиорелейных линиях связи с частотной модуляцией вследствие многолучевого распространения радиоволн или несогласованностей и неоднородностей антенных фидеров. Просин А. В. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1958, вып. 2, 168—208

Исследуется корреляционная функция сигнала, искаженного за счет внутренних неоднородностей фидера. Даны примеры расчетов. Ю. Н. Благовещенский

7 В142. Приложение теории потенциальной помехоустойчивости к задачам коротковолновой телеграфной связи. Мельников В. С. «Электросвязь», 1958, № 6, 5—12

Рассматривается телеграфный сигнал, принимающий два возможных значения $\xi A(t)$ и $\xi B(t)$, где ξ — распределено нормально, а $A(t)$ и $B(t)$ — заданные функции. В тракте приемника к сигналам прибавляется гауссовский шум. В этих условиях исследуется приемник, осуществляющий прием по принципу максимума отношения правдоподобия. Для случая частотного телеграфирования, когда

$$A(t) = U_{CA}\sin(\omega_A t + \varphi_A) \quad \text{и} \quad B(t) = U_{CB}\sin(\omega_B t + \varphi_B),$$

где U_C и φ — медленно меняющиеся случайные амплитуда и фаза, найдена вероятность ошибочного приема.

Р. Л. Добрушин

7 В143. О расчете характеристик обнаружения при квадратичном суммировании сигналов. Сарагович В. Г. «Радиотехн. и электроника», 1960, **5**, № 4, 531—536

Некоторые задачи выделения сигналов на фоне шумов приводят к статистике

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + y_k^2),$$

где «входные напряжения» x_k и y_k — гауссовские случайные величины с заданной $2n$-мерной плотностью ($2n$-величин x_k и y_k). Ставится задача нахождения распределения величины ζ. Автор показывает, что характеристическая функция величины ζ есть

$$f_\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k\leqslant 1}^{2n}(1 - 2\lambda_k it)}},$$

где λ_k — собственные числа матрицы $\mathfrak{M} = \| m_{ij} \|$ (матрица вторых моментов $2n$ величин x_k, y_k. Далее отмечается, что во многих задачах обнаружения собственные числа λ_k четно-кратны (приводится пояснение этого факта), поэтому

$$f_\zeta(t) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1 - 2\lambda_k it)}.$$

Откуда

$$P_\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{l=1}^{n_k} C_{kl}k_{2l}(x/\lambda_k),$$

где $n_1 + \ldots + n_\nu = n$, C_{kl} — коэффициенты разложения $f_\zeta(t)$ на простейшие дроби, k_{2l} — плотность распределения χ^2 с $2l$ степенями свободы, ν — число различных собственных значений, n_k — их кратности. Приводятся примеры. А. Н. Ширяев

7 В144. Оптимальное обнаружение сигналов на фоне помех неизвестной интенсивности. Фалькович С. Е. «Радиотехн. и электроника», 1960, **5**, № 9, 1539—1541

Решается задача об обнаружении сигналов $s(t; \alpha)$, представляющих собой заданную функцию времени t и совокупности случайных параметров α, на фоне помехи $n(t)$ гауссовского случайного процесса с спектральной плотностью, являющейся случайной величиной, постоянной на каждом интервале наблюдения $[0, T]$. Применяется критерий Неймана-Пирсона. Автор вычисляет отношение правдоподобия Λ при достаточно большом $m = \Delta f \cdot T$, где Δf — «ширина спектра» помехи, и показывает, что он совпадает с соответствующим отношением для детерминированной N_0, если вместо N_0 в последнее подставить величину

$$z^2 = \frac{1}{m}\int_0^T x^2(t)\,dt,$$

причем $x(t) = s(t, \alpha) + n(t)$ — принятая реализация. Приводятся выражения для отношения правдоподобия и порогового уровня в следующих случаях:

а) сигнал не содержит случайных параметров,

б) случайным параметром является начальная фаза сигнала,

в) случайными параметрами являются начальная фаза и амплитуда сигнала. В последнем случае получены формулы для вероятности ложной тревоги и вероятности обнаружения. В. П. Яковлев

7 В145. Оценка допплеровского смещения в спектре шума. Swerling P. Estimation of Doppler shifts in noise spectra. «IRE Internat. Convent. Rec.», 1960, **8**, № 4, 148—153 (англ.)

Рассматривается задача статистической оценки параметра h по конечной реализации $\{N(t)\}$ случайного процесса, спектр которого принадлежит классу функций $\{F_h(\omega)\}$, где

$$F_h(\omega) = F[\omega(1+h)]$$

и $F(\omega)$ — заданная четная неотрицательная функция с интегрируемым квадратом. Физически h представляет собой допплеровское смещение. Указывается на возможность приложения этой задачи к определению скорости межпланетного корабля. Показывается, что разумный класс оценок для h задается выражением

$$\hat{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\omega)\hat{F}_h(\omega) - \alpha(\omega)F(\omega)]\,d\omega,$$

где $\alpha(\omega)$ должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям, $\hat{F}_h(\omega)$ — оценка спектральной плотности реализации случайного процесса. Определяется математическое ожидание и дисперсия такой оценки. Рассматривается задача определения функции $\alpha(\omega)$, минимизирующей дисперсию оценки. Оптимальная функция $\alpha(\omega)$ ищется в классе

$$\alpha(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \delta(\omega - \omega_i),$$

что позволяет найти выражение $\alpha(\omega)$, удобное для практического использования. Рассматривается задача оценки $\hat{F}_h(\omega)$ по конечной реализации $N(t)$. Показано, что в качестве оценки спектральной плотности можно использовать преобразование Фурье произведения оценки корреляционной функции процесса $\{N(t)\}$ и некоторой функции $D(\tau)$. Определяются статистические параметры такой оценки. Описывается модификация предложенного метода при неполном знании $F(\omega)$. Приводится пример численного расчета. Б. А. Власюк

7 В146. Поправка к статье Д. Г. Лампарда. Reed I. S. Correction to a paper by D. G. Lampard. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, **6**, № 4, 502 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 1156.

7 В147. Описательное введение в статистическую теорию связи. McMillan B. A desciptive introduction to the statistical theory of communication. «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 345—352 (англ.)

В начале статьи обсуждаются общие идеи математической статистики, затем дается аксиоматическое определение вероятностей, в конце — строгое определение канала связи и формулировка теоремы Шеннона.

Р. Л. Добрушин

7 В148. Статистическая теория информации. Fano R. M. The statistical theory of information. «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 353—372 (англ.)

Подробное введение в шенноновскую теорию информации, написанное на относительно доступном уровне.

Р. Л. Добрушин

7 В149. Случайные процессы в контроле и связи. Drinick R. F. Random processes in control and communications. «Science», 1960, **132**, № 3431, 865—870 (англ.)

Умело написанная популярная статья. Р. Л. Добрушин

7 В150. Теория информации. Детальное введение. Holroyd P., Jones G. P. Information theory. A detailed introduction. «Electron. Technol.», 1961, **38**, № 2, 49—57 (англ.)

Еще одно популярное введение в шенноновскую теорию информации. Р. Л. Добрушин

7 В151. Введение в теорию информации. Dubois Philippe. Introduction à la théorie de l'information. «Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker», 1960, **60**, № 2, 275—292 (франц.; рез. нем., англ., итал.)

Изложение популярное и стандартное. Р. Л. Добрушин

7 В152. Теория связи. Stearman G. H. Communication theory. «Aeronautics», 1960, **42**, № 6, 25—30 (англ.)

Дается популярный обзор развития теории связи и теории информации в историческом плане. В. А. Власюк

7 В153. Некоторые математические замечания о теории информации. Stam A. J. Enige punten uit de wiskunde der informatietheorie. «Statist. neerl.», 1960, **14**, № 3-4, 259—265 (гол., рез. англ.)

Обзор.

7 В154. Понятие энтропии в теории вероятностей. Hinčin A. Ya. The concept of entropy in the theory of probability. «Amer. Math. Soc. Translat.», 1959, **12**, 181—197 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3771.

7 В155. О теореме П. Эрдёша и ее применении в теории информации. Rényi A. On a theorem of P. Erdős and its application in information theory. «Mathematica» (RPR)», 1959, **1**, № 2, 341—344 (англ.)

Дается более простое доказательство известного результата Фаддеева об аксиоматическом определении энтропии (РЖМат, 1958, 524). Р. Л. Добрушин

7 В156. Теорема кодирования и ее обращение для каналов с конечной памятью. Feinstein A. On the coding theorem and its converse for finite-memory channels. «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 560—575 (англ.)

Для дискретных каналов с конечной памятью в смысле Файнштейна—Хинчина доказывается совпадение эргодической и обычной пропускной способности (аналогичный результат был получен Цареградским, см. РЖМат, 1959, 4947; 1960, 1926). Показывается возможность упростить доказательство прямой теоремы Шеннона о возможности кодирования непосредственно сведя случай канала с конечной памятью к случаю канала без памяти. Далее рассматривается частный подкласс каналов без памяти, для которых при фиксированном сигнале на входе значения сигнала на выходе оказываются независимыми. Для таких каналов доказывается сильное обращение теоремы Шеннона, состоящее в том, что если число сообщений, передаваемых за время n, равно $2^{n(c+\delta)}$ где $\delta>0$ и c — пропускная способность канала, то вероятность ошибки будет при $n\to\infty$ стремиться к 1 (а не просто не стремится к 0, как утверждает слабое обращение). Для каналов без памяти этот факт доказан Вольфовицем. Наконец, рассматриваются полунепрерывные каналы с конечной памятью (т. е. каналы с конечной памятью, для которых пространство состояний на входе дискретно, а на выходе непрерывно). Для таких каналов доказывается прямая теорема Шеннона, совпадение эргодической и обычной пропускных способностей и слабое обращение. Р. Л. Добрушин

7 В157. Некоторые результаты теории кодирования для каналов с шумами. Шаннон Клод Э. (Shannon C. E.). «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1959, **3**, № 2, 151—167

См. РЖМат, 1958, 9150.

7 В158. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции. Gel'fand I. M., Yaglom A. M. Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function. «Amer. Math. Soc. Translat.», 1959, **12**, 199—246 (англ.)

Перевод с русского см. РЖМат, 1958, 3936.

7 В159. Нормированная ε-энтропия множеств и передача информации непрерывных источников через непрерывные каналы связи. Розенблат-Рот. М. «Докл АН СССР», 1960, **130**, № 2, 265—268

Приводятся различные результаты, относящиеся к возможности передачи информации с точностью до заданного ε в смысле средней ошибки относительно заданной метрики, применимые при малых ε. В частности, формулируется теорема Шеннона. Используются понятия ε-энтропии и коэффициента эргодичности переходной функции, заимствованные из теории цепей Маркова. Сложность определений автора и оригинальность его трактовки вопроса не дают возможности сформулировать в реферате его результаты. Стремление автора к лаконичности привело к тому, что некоторые из определений, данных в статье, недостаточно ясны.

Р. Л. Добрушин

7 В160. Наибольшая величина осуществимого кода, корректирующего ошибки. Wolfowitz J. La plus grande longueur réalisable d'un code correcteur d'erreurs. «Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS», 1959, 139—140. Discuss., 141 (франц.)

Краткое резюме результатов, подробно опубликованных в других работах автора. Р. Л. Добрушин

7 В161. Оценка пропускной способности некоторых каналов связи со случайно изменяющимися параметрами. Хургин Я. И. «Радиотехника», 1959, **14**, № 12, 19—27

Пусть

$$\chi(t) = \varkappa(t)\,\xi[t - \theta(t)] + \zeta(t),$$

где $\theta(t)$, $\varkappa(t)$, $\zeta(t)$, $\xi(t)$ — независимые в совокупности стационарные процессы. Найдено выражение для спектральной плотности процесса $\chi(t)$, в которое входят спектральная плотность процессов $\chi(t)$, $\xi(t)$, $\zeta(t)$ и характеристическая функция двумерного распределения процесса $\theta(t)$. Это выражение упрощается, если процесс $\theta(t)$ — гауссовский. Используя идею И. А. Овсеевича и М. С. Пинскера (РЖМат, 1960, 638), автор дает оценку снизу для пропускной способности канала с $x(t) \equiv 1$, заменяя при вычислении информации процесс $\chi(t)$ на гауссовский процесс с тем же спектром. Указывается возможность обобщений на случай многолучевого канала, где

$$\chi(t) = \sum_{1}^{N} \varkappa_n(t)\,\xi_n(t - \theta_n(t)) + \zeta_n(t)$$

и все рассматриваемые процессы независимы.

Р. Л. Добрушин

7 В162. О пропускной способности канала с непрерывным шумом. Muroga Saburo. On the capacity of a noisy continuous channel. XIIth Gen. Assembly U.R.S.I. Commiss. 6, Boulder, Colo, 1957, № 46, 10 pp. (англ.)

7 В163. О пропускной способности каналов со случайным параметром флуктуации. Siforov V. I. On the capacity of channels with random parameter fluctuations. XIIth Gen. Assembly U.R.S.I. Commiss. 6, Boulder, Colo, 1957, № 273, 6 pp. (англ.)

7 В164. Класс бинарных систематических кодов, корректирующих ошибки, возникающие случайно и залпами. Calabi L., Haefeli H. G. A class of binary systematic codes correcting errors at random and in bursts. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 79—94 (англ.)

Рассматриваемый класс кодов, которые авторы называют кодами Хоббса, имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим d-мерный параллелепипед в евклидовом пространстве с координатами $(x_1, \ldots, x_d)$, выделяемый системой неравенств $0 \leqslant x_l \leqslant m_l$, где m_l — заданные константы. Отождествим теперь пространство всевозможных последовательностей $B^N = (a_1, \ldots, a_N)$, где a_j принимает значение 0 и 1, а $N = m_1 m_2 \ldots m_d$ с совокупностью функций, определенных на целых точках этого параллелепипеда и принимающих два значения 0 и 1. Тогда систематический код Хоббса с параметрами $m_1, \ldots, m_d$ и h (где $h \leqslant d$ — целое число) определяется как подмножество пространства B^N, выделяемое тем условием, чтобы для любой прямой, параллельной координатной оси с номером $j \geqslant h$, сумма по модулю два значений функции в точках, лежащих на этой прямой, равнялась нулю. Исследуются соотношения между кодами Хоббса для разных значений параметров. Мы будем говорить, что последовательность $(a'_1, \ldots, a'_N) \in B^N$ получается из последовательности $(a_1, \ldots, a_N) \in B^N$ при помощи залпа k ошибок длины l, если имеется ровно k индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ таких, что $a_{i_j} \neq a'_{i_j}$ и

$$a_{i_k} - i_1 = l.$$

Естественно предположить, что во многих реальных каналах имеется тенденция к появлению залпов относительно малой длины. Ввиду этого разумно ввести следующее определение: Код $A_1, \ldots, A_k$ $(A_i \in B^N)$ корректирует все залпы из не более чем $\bar{k}$ ошибок, длины не более чем $\bar{e}$, если не существует элемента $\bar{A} \in B^N$ такого, что $\bar{A}$ получается из некоторых A_i и A_j $(i \neq j)$ при помощи залпов не более чем k ошибок, длины не более чем $\bar{e}$. Устанавливаются некоторые (далеко не исчерпывающие) результаты о залпах, корректируемых кодами Хоббса. Далее разбирается вопрос о применимости кодов Хоббса при передаче по каналу со стиранием. Наконец, для некоторых частных подклассов класса кодов Хоббса исследуется вопрос о явном задании способа декодирования ошибок. Р. Л. Добрушин

7 В165. Класс кодов с исправлением нескольких ошибок и схема декодирования. Рид Ирвинг С. «Кибернет. сб.» 1. М., Изд-во ин. лит., 1960, 189—205

Перевод с английского см. РЖМат, 1956, 3390.

7 В166. Геометрическое построение оптимальных кодов. Пушной Б. М. «Электросвязь», 1959, № 10, 3—12

Как известно, построение корректирующего кода для простейшего гауссовского канала сводится к выбору множества точек на поверхности n-мерной сферы, которые отстоят друг от друга на максимальные расстояния. Автор вводит в рассмотрение класс таких множеств, названный им регулярным оптимальным кодом (математическое определение его дано не четко). Далее, используя элементарные соображения теории многогранников, автор исследует возможности построения таких кодов.

Р. Л. Добрушин

7 В167. К сравнению равномерных кодов при бинарной передаче. Варшавер Б. А. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1959, вып. 3, 49—58

На основе элементарных соображений сравниваются равномерный код, код с повторениями и корректирующий код (при исследовании последнего автор берет за объем кода известную оценку Хемминга).

Р. Л. Добрушин

7 В168. Исправление ошибок в программе для проекта «Меркурий». Dimsdale B., Weinberg G. M. Programmed error correction in Project Mercury. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1960, **3**, № 12, 649—652 (англ.)

Описывается использование систематических кодов Хемминга для коррекции ошибок программы, записанной на магнитную ленту в целях достижения высокой надежности в осуществлении космического полета человека.

Р. Л. Добрушин

7 В169. Вопросы точности и эффективности телеизмерительных систем. Михайловский В. Н. В сб. «Автомат. контроль и измерит. техн.» Вып. 3. Киев, АН УССР, 1959, 7—19

Элементарная попытка использовать в проблеме телеизмерения понятия шенноновской теории информации, недостаточно учитывающая специфику этих понятий.
Р. Л. Добрушин

7 В170. Что подразумевают под «кодом»? Tietz Walter. Was versteht man unter «Code»? «Fernmelde-Prax.», 1959, **36**, № 20, 785—793 (нем.)

Примеры практически используемых кодов.
Р. Л. Добрушин

7 В171. Теория информации и теория ошибок наблюдения. Dore Paolo. Teoria dell'informazione e teoria degli errori di osservazione. «Boll. geod. e sci. affini», 1960, **19**, № 4, 609—615 (итал.)

Общие рассуждения. Р. Л. Добрушин

7 В172. Методика и теория информации. Meyer Gerhard. Methodik und Informationstheorie. «Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden», 1958—1959, **8**, № 3, 623—626 (нем.)

Общее обсуждение приложения идей теории информации к методике преподавания. Подробно рассматривается вопрос о рациональном выборе внешнего вида шкалы измерительного прибора. Р. Л. Добрушин

7 В173. Интерпретация и теория связи. Stumpers F. L. H. M. Interpretation and communication theory. «Synthese», 1959, **11**, № 2, 119—126 (англ.)

Беглый обзор некоторых вопросов шенноновской теории информации и статистической лингвистики с элементарными рассуждениями о связи этих теорий.
Р. Л. Добрушин

7 В174. О синхронизации автогенератора синусоидальной силой при наличии флуктуационных помех. Раевский С. Я., Хохлов Р. В. «Радиотехн. и электроника», 1958, **3**, № 4, 507—511

Автогенератор синусоидальных колебаний описывается уравнением:

$$\ddot{x} - 2\delta_0(x)\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 E,$$

где $x(t)$ — напряжение на конденсаторе контура, $\delta_0(x)$ — характеризующая автогенератор функция, $E(t)$ представляет собой сумму гармонического колебания и узкополосного стационарного процесса. Решение уравнения представляется в виде $x = A\sin(pt + \varphi)$, где $A(t)$ и $\varphi(t)$ медленно меняющиеся амплитуда и фаза. Для φ получают дифференциальное уравнение, решение которого исследуется при некоторых условиях.

7 В175. К теории флуктуаций в автоколебательных системах с кусочно-линейными характеристиками. Рытов С. М. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1959, **2**, № 1, 50—62

Автор рассматривает автоколебательную систему в окрестности устойчивого предельного цикла на фазовой плоскости (x, y), задаваемую системой линейных дифференциальных уравнений: при $y>0$ с одними постоянными коэффициентами и при $y<0$ — с другими. Предполагается, что на систему действуют случайные силы с некоторыми условиями на их малость и взаимозависимость. Автором найдены формулы для корреляций между разными характеристиками рассматриваемой системы: отклонение от периодического движения, время колебаний и т. д. Изучается спектр возникающего процесса. Подробно разобран пример случайных флуктуаций лампового генератора с z-характеристикой.
Ю. Н. Благовещенский

7 В176. К теории оптимальной фильтрации сигнала в классе систем с переменными параметрами при наличии внутренних шумов. Ли Хен Вон. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1960, № 2, 137—152

К входу системы автоматического управления приложено воздействие $y(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) = g(t) + m(t)$ — полезный сигнал с неслучайной составляющей $g(t)$ и случайной составляющей $m(t)$; $n(t)$ — помеха и где выход системы $x(t)$ задается при помощи системы соотношений:

$$\varepsilon_0(t) = y(t) - W^{(2)}(p, t)\, x(t),$$
$$y_0(t) = W^{(1)}(p, t)\, x(t),$$
$$y_i(t) = W_i(p, t)\, y_{i-1}(t) + u_i(t),\ i = 1, \ldots, m,$$
$$x(t) = y_m(t) \text{ (здесь } p = d/dt).$$

Предполагается, что: 1) $m(t)$, $n(t)$, $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ — некоррелированные между собой случайные (в общем нестационарные) функции с нулевыми средними значениями и известными корреляционными функциями; 2) неслучайная функция $g(t)$ имеет вид $g(t) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(t)$, где c_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) — известные постоянные, $\{\varphi_\nu(t)\}$ — некоторая произвольная полная система функций. Рассматриваются случаи: А) когда коррекция осуществляется в обратной связи, т. е. когда $W^{(1)}(p, t)$ фиксировано, а $W^{(2)}(p, t)$ неизвестно и Б) когда оптимальная коррекция осуществляется последовательно (т. е. $W^{(2)}(p, t) \equiv 1$ и $W^{(1)}(p, t)$ неизвестно). Требуется, чтобы разность $\varepsilon(t) = H(p, t)\, s(t) - x(t)$, где $H(p, t)$ — заданный оператор воспроизведения, удовлетворяла следующему условию минимальности: для любого вида неслучайной функции $g(t)$ математическое ожидание, $E\{\varphi[\varepsilon(t)]\}$ минимально в любой момент времени t, где φ — некоторая определенная неотрицательная функция. Дается полное решение этой задачи. Л. Я. Цлаф

7 В177. Об оценке погрешностей гидроскопических приборов при воздействии на них случайных возмущений. Ривкин С. С. В сб. «Вопр. прикл. гироскопии». Вып. I, Л., Судпромгиз, 1958, 5—19

Рассматриваемая задача сводится к исследованию решения линейного дифференциального уравнения, правая часть которого — стационарный случайный процесс. Спектр этого процесса находится из опытных данных. Автор подчеркивает существенное отличие полученных им качественных выводов от тех, которые следуют из рассматривавшихся ранее нестатистических моделей явления. Р. Л. Добрушин

7 В178. Теория дуального управления. I. Фельдбаум А. А. «Автоматика и телемеханика», 1960, **21**, № 9, 1240—1249 (рез. англ.)

Вводится весьма общая постановка задачи оптимального управления в замкнутой системе с обратной связью, основанная на идеях теории решающих функций.
Р. Л. Добрушин

7 В179. Об эргодических свойствах установившихся процессов очереди. Akaike Horotugu. On ergodic property of a tandem type queueing process. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1957, **9**, № 1, 13—21 (англ.)

Изучаются эргодические свойства двухфазной системы очереди (система очереди, в которой заказчики последовательно обслуживаются на двух обслуживающих пунктах). Предполагается, что промежутки времени t между поступлениями заказчиков — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(t)$; длительности обслуживания s заказчиков на первом обслуживающем пункте — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(s)$. Заказчики, обслуженные на первом обслуживающем пункте, поступают на второй, длительности обслуживания σ на котором — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(\sigma)$. Кроме того, все упомянутые выше случайные величины предполагаются целочисленными. Пусть ω_i — время ожидания i-го заказчика во второй фазе очереди, ν_i — номер i-го заказчика, не ожидавшего в первой фазе. Отмечается, что случайные величины ω_{ν_i} связаны в цепь Маркова. Доказано, что при $E(t) > E(s)$, $E(t) > E(\sigma)$ состояние 0 этой цепи есть возвратное ненулевое состояние; в случае $E(s) > E(t)$, $E(s) < E(\sigma)$ все состояния цепи невоз-

вратны и с вероятностью единица $\lim_{i\to\infty}\omega_{\nu_i}=+\infty$. Кратко обсуждается случай, когда число фаз больше двух.

М. И. Ядренко

7 В180. К проблеме ожидания в технике связи. Störmer Horand. Über ein Warteproblem aus der Vermittlungstechnik. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 5-6, 236—246 (нем.; рез. англ., русск.)

Рассматривается однолинейная система с ожиданием, на которую поступает простейший (в смысле А. Я. Хинчина) поток вызовов с интенсивностью $1/a$. Время обслуживания T_0 каждого вызова предполагается постоянным. С каждым вызовом связывается определенная степень важности — ранг μ. Множество рангов μ конечно ($\mu=1,\ldots, m$). Ожидающие вызовы обслуживаются в порядке старшинства рангов, вызовы с одинаковыми рангами обслуживаются в порядке их поступления. В условиях стационарного режима работы системы находится распределение времени ожидания вызовов в зависимости от их ранга. Затем изучается случай, когда ранг μ приписывается вызову случайным образом (с постоянной вероятностью $1/m$). При $m\to\infty$ получено простое предельное выражение функции распределения времени ожидания и приведены ее графики для некоторых значений поступающей нагрузки $A=T_0/a$.

В. Н. Блюменфельд

7 В181. Комбинаторные методы и уравнения Колмогорова в теории очередей с одним обслуживающим устройством. Beneš V. E. Combinatory methods and stochastic Kolmogorov equations in the theory of queues with one server. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, **94**, № 2, 282—294 (англ.)

Автор рассматривает процесс очереди с одним обслуживающим устройством. Вводятся следующие вспомогательные процессы: $W(t)$ — время, которое ожидал бы клиент, если бы он прибыл в момент t. $K(t)$ имеет скачки в моменты прибытия клиентов; и постоянно между этими скачками величина скачка равна соответствующему времени обслуживания. В статье изучается процесс очереди с общей теоретической точки зрения без каких-либо специальных предположений о потоке клиентов, временах обслуживания и их распределениях вероятностей. Один из главных результатов:

$$\exp\{-sW(f)\}=$$
$$=\exp\{-s(K(f)-f\}\left\{1-s\int_0^1\exp\{s(K(u)-u)\}\times\right.$$
$$\left.\times P(u,0)\,du\right\},\qquad(1)$$

где $P(u,0)=1$, если $W(u)=0$ и $P(u,0)=0$, если $W(u)\neq 0$. Доказывается, что с вероятностью 1 $\exp\{-sW(f)\}$ представляет собой единственное решение уравнения, которое аналогично уравнению Такача (РЖМат, 1956, 6748) и может быть получено также другим методом, обычно используемым в марковских процессах. $P(u,0)$ удовлетворяет уравнению Вольтерра первого рода. Беря математическое ожидание (1) и используя обратное преобразование Лапласа, автор получает следующий результат: Пусть

$$R(t,u,w)=P\{K(t)-K(u)-f+u\leqslant w\mid W(u)=0\}.$$

Тогда

$$P(W(t)\leqslant w)=P\{K(f)-f\leqslant w\}=\frac{\partial}{\partial w}\int_0^f R(f,u,w)\times$$
$$\times P\{W(u)=0\}\,du\quad\text{для}\quad w\geqslant 0,$$

где вероятность $P(W(u)=0)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{f+y}R(f,u,y)\,P(W(u)=0)\,du=\int_0^{f+y}R(K(f)\leqslant u)\,du$$
$$\text{для } 0\geqslant y\geqslant -f.$$

Таким образом выражение $P(W(f)\leqslant w)$ зависит от распределений, связанных с $K(u)$ ($u\leqslant f$) линейно. Эти результаты представляют обобщение результатов Рейка (РЖМат, 1959, 11287), относящихся к пуассоновскому потоку клиентов и независимым временам обслуживания. Из доказанных формул можно вывести некоторые заключения для частных случаев процессов очереди.

A. Prékopa

7 В182. О транзитном поведении простой очереди. Finch P. D. On the transient behaviour of a simple queue. «J. Roy. Statist. Soc.», 1960, **B 22**, № 2, 277—284 (англ.)

На однолинейную систему обслуживания с ожиданием поступает пуассоновский стационарный поток параметра λ. Продолжительности обслуживания независимы. Пусть η_n — число абонентов в системе после окончания обслуживания n-го абонента и β_n — число абонентов, поступивших за время обслуживания n-го абонента. Обозначим:

$$P_j^n=P\{\eta_n=j\},\ k_j^m=P\left\{\sum_{i=n}^{n+m-1}\beta_i=j\right\},$$

$$P_j(z)=\sum_{n=1}^{\infty}P_j^n z^{n-1}\ (j\geqslant 0,\ n\geqslant 1,\ |z|<1),$$

$$\alpha_j(z)=\sum_{n=1}^{\infty}k_{n+j-1}^n z^n\ (j\geqslant 0,\ |z|\leqslant 1),$$

$$\alpha_{1-j}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n^{n+j}z^{n+j}\ (j\geqslant 1,\ |z|\leqslant 1).$$

Тогда при $|z|<1$

$$P_0(z)=\left[P_0^1+\sum_{n=0}^{\infty}P_n^1\alpha_{1-n}(z)\right][1-\alpha_0(z)+\alpha_1(z)]^{-1},$$

$$P_j(z)=P_j^1+\sum_{n=0}^{\infty}P_n^1\alpha_{1+j-n}(z)+$$
$$+[\alpha_j(z)-\alpha_{j+1}(z)]\,P_0(z)\ (j\geqslant 1).$$

Для случая показательного времени обслуживания даны точные выражения для $P_j(z)$ $(j\geqslant 0)$. Если входящий поток является произвольным независимым и Q_j^n — распределение числа абонентов, находящихся в системе в момент прибытия n-го абонента, то

$$Q_k^n=0\ (k>n),\quad Q_0^{n+1}=P_0^n\ (n\geqslant 1),$$
$$\sum_{k=j}^{n+j-1}Q_k^{n+j}=\sum_{k=j}^{\infty}P_j^n\ (j,n\geqslant 1).$$

Устанавливается зависимость между производящими функциями распределений Q_j^n и P_j^n. При пуассоновском стационарном входящем потоке, когда относительная интенсивность $\rho<1$, предельное распределение $P_j=\lim_{n\to\infty}P_j^n$ $(j\geqslant 0)$ (доказательство существования см. Kendall D. G., J. Roy. Statist. Soc., 1951, B-13, 151—173) находится по формулам:

$$P_0=1-\rho,\ P_j=(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n+j-1}^n-k_{n+j}^n)\ (j\geqslant 1).$$

Полученные результаты могут оказаться полезными при решении задач, в которых достаточно знать распределение длины очереди лишь в моменты окончания обслуживания абонентов.

Примечание референта. Под транзитным поведением очереди понимается ее распределение лишь в моменты окончания обслуживания или в моменты прибытия абонентов.

Н. В. Яровицкий

7 В183. О предельном распределении времени занятости полнодоступного пучка линий. Башарин Г. П.

«Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 2, 246—252 (рез. англ.)

Рассматривается полнодоступный пучок из n линий, на который поступает поток вызовов с интенсивностью λ. Предполагается, что 1) время занятия линий не зависит от поступающих вызовов и имеет экспоненциальное распределение со средним значением 1; 2) вызовы, поступающие в момент занятости всех линий пучка, теряются. Число линий $N(t)$, занятых в момент t, образует однородный марковский процесс с матрицей плотностей вероятностей перехода $A = \| a_{\alpha\beta} \|^n$, где

$$a_{\alpha\alpha} = -\lambda - \alpha,\ a_{\alpha\alpha+1} = \lambda,\ a_{\alpha+1,\alpha} = \alpha + 1,\ \alpha = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$a_{nn} = -n,\ a_{\alpha\beta} = 0, \text{ если } |\alpha - \beta| > 2,\ \alpha\beta = 0, 1, \ldots, n.$$

Финальные вероятности p_α его состояний подсчитываются по формулам Эрланга:

$$p_\alpha = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}\left[\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}\right]^{-1},\ \alpha = 0, 1, \ldots, n.$$

Вводится случайный вектор $\xi(t) = (\xi_0(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$, где $\xi_\alpha(t)$ — время пребывания системы в состоянии α за отрезок времени $[0, t]$. Поскольку все состояния процесса $N(t)$ являются при $\lambda > 0$ сообщающимися, то при $t \to \infty$

$$M_\gamma\, \xi_\alpha(t) = t\omega_\alpha + 0(1),$$

$$M_\gamma \{\xi_\alpha(t) - t\omega_\alpha\}\{\xi_\beta(t) - t\omega_\beta\} = t\omega_{\alpha\beta} + 0(1),$$

причем

$$\omega_\alpha = \frac{A_{\alpha\alpha}}{\sum_0^n A_{\alpha\alpha}},\ \omega_{\alpha\beta} = \omega_\alpha R + \omega_\alpha R_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta R - R_{\alpha\beta},$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\omega_{\alpha\alpha} = \omega_\alpha (2R_\alpha - \omega_\alpha R),$$

где M_γ — знак математического ожидания при условии, что в момент $t = 0$ система находилась в состоянии γ, $R_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\,|\,\alpha\beta} / \sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha\alpha}$ ($A_{\alpha\beta\,|\,\alpha\beta}$ — главный минор $n-1$-го порядка, получающийся из A вычеркиванием строки и столбца с номерами α и β; $A_{\alpha\alpha}$ — главный минор элемента $a_{\alpha\alpha}$)

$$R_\alpha = \sum_{\beta=0}^{n} R_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=0}^{n} R_{\beta\alpha},\ R = \sum_{\lambda,\beta=0}^{n} R_{\alpha\beta}.$$

Используя тот факт, что матрица A якобиева, автор получает явные выражения для $R_{\alpha\beta}$, R_α, R, что позволяет вычислять $\omega_{\alpha\beta}$ и $\omega_{\alpha\alpha}$. Прилагаются таблицы вероятностей p_n и средних квадратических отклонений $\sigma_n = \sqrt{\omega_{nn}}$ потерь для $n = 5, 10, 15, 20, 30, 40$.

С. В. Ефремов

7 В184. О задаче $M/M/s$ в теории очередей. Yüh M. I. On the problem M/M/s in the theory of queues. «Sci. Rec.», 1959, **3**, № 12, 614—615 (англ.)

Рассматривается система очереди, в которой промежутки между поступлениями заказчиков и отрезки времени обслуживания есть независимые случайные величины с отрицательно-показательным распределением. Число обслуживающих устройств равно s. Для вероятности $p_k(t)$ того, что очередь в момент t равна k, указано некоторое интегральное представление. Сформулированы также некоторые достаточные условия для существования $\lim_{t\to\infty} p_k(t)$. Доказательства не приведены.

М. И. Ядренко

7 В185. О распределении времени ожидания при предельной нагрузке. Störmer Horand. Über die Verteilung der Wartezeiten bei Verkehrsspitzen. «Arch. elektr. Übertrag.», 1959, **13**, № 6, 262—266 (нем., рез. англ.)

Рассматривается система с одним обслуживающим устройством и постоянным временем обслуживания T_0, на которую поступает, начиная с момента $t = 0$, пуассоновский поток вызовов с параметром A/T_0. Вызовы образуют очередь в порядке поступления, и обслуживание их производится, начиная с момента $T > 0$. Исследуется время ожидания для n-го поступившего сообщения. Если $A < 1$, то при $n \to \infty$ устанавливается, как известно, асимптотическое распределение, задаваемое формулами Эрланга. Основное внимание уделяется случаю $A \geqslant 1$. Для этого случая находятся явные формулы и проводятся асимптотические исследования.

Е. Г. Николаев

7 В186. Конечные очереди и циклические очереди. Koenigsberg Ernest. Finite queues and cyclic queues. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 2, 246—253 (англ.)

Рассматривается следующая циклическая система: N машин передаются со станции 1 (станции ремонта), где есть M ремонтных мест, на станцию 2, где они вступают в работу и откуда в случае поломки отправляются снова на станцию 1. Число рабочих мест, которые занимаются машинами на станции 2, равно $A \leqslant N$. Если $A = N$, то система сводится к случаю, известному в литературе как задача о шведской машине (Swedish machine problem), если $A < N$, то отремонтированные машины могут стоять в очереди. Предполагается еще, что времена обслуживания на станции 1 (ремонта) и станции 2 (работы) — независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение со средним μ_1 и μ_2 соответственно, и обслуживание на обеих станциях происходит в порядке поступления машин. Тогда любая машина либо ждет работы или ремонта, либо работает или ремонтируется. Возможные состояния системы описываются числами n_1 и n_2, число машин на станциях 1 и 2 соответственно и $n_1 + n_2 = N$. Для такой системы ищутся $P(n_1, n_2)$ — стационарные вероятности системы находиться в устойчивом положении (n_1, n_2) и основные параметры, характеризующие эффективность системы. Приводятся таблицы таких параметров для нескольких систем ($M = 1, 2$) и показывается возможность их использования для улучшения производительности системы. Указывается на возможность применения такого же подхода для циклических систем с бо́льшим числом станций.

С. В. Ефремов

7 В187. Обобщение формул Эрлинга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться. Марьянович Т. П. «Укр. матем. ж.», 1960, **12**, № 3, 279—286 (рез. англ.)

Рассматривается система обслуживания, состоящая из n приборов. Каждый прибор независимо от других приборов в случайные моменты времени во время обслуживания требования может выходить из строя и затем восстанавливается. Предполагается, что время непрерывной работы прибора от начала работы до выхода из строя имеет функцию распределения $H(x)$; а время, нужное для восстановления прибора, имеет функцию распределения $G(x)$, поток требований — пуассоновский с параметром λ, время обслуживания требования имеет функцию распределения $F(x)$. Требования, пришедшие при отсутствии свободных приборов, а также требование, обслуживавшееся в момент выхода прибора из строя, теряются. Ставится задача — определить вероятности p_{ij} того, что в любой момент времени в системе обслуживания при стационарном режиме ра-

боты будет i приборов, занятых обслуживанием требований и j приборов, находящихся в ремонте. Доказывается существование плотности распределения вероятностей $p_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i; y_1, \ldots, y_j t)$ $(i + j \leqslant n)$ того, что в момент t имеется i исправных занятых приборов, обслуживающих требования в течение промежутков времени $x_1, \ldots, x_i$ и j приборов, находящихся в ремонте в течение промежутков времени $y_1, y_2, \ldots, y_j$ соответственно. Получена система интегро-дифференциальных уравнений относительно

$$p^*_{ij}(x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots y_j t) =$$

$$= \frac{p_{ij}(x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j, t)}{\prod_{s=1}^{i}(1 - H(x_s))\,(1 - F(x_s))\prod_{r=1}^{j}(1 - G(y_r))}$$

и найдено ее решение в виде

$$p^*_{ij} = \frac{\lambda^{i+j}\alpha^j}{i!\,j!}\,p_{00},\quad 0 \leqslant i, j \leqslant n,$$

где

$$\alpha = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dH(x)$$

и p_{00} определяется из условий нормировки.

Доказывается, что при некоторых условиях процесс имеет следующее стационарное распределение вероятностей:

$$p_{ij}(x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j) =$$

$$= \frac{\lambda^{i+j}\alpha^j}{i!\,j!}\,p_{00}\prod_{s=1}^{i}(1 - F(s))\,(1 - H(x_s))\prod_{r=1}^{j}(1 - G(r)).$$

Рассмотрены следующие частные случаи: а) $H(x) \equiv 0$, $G(x) \equiv 1$, б) $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ — показательные распределения. Б. А. Власюк

7 В188. Новый показатель эффективности проблем очередей. Rawdin E. A new measure of effectiveness for queuing problems. «Operat. Res.», 1960, 8, № 2, 278—280 (англ.)

В задачах об очередях в настоящее время рассматривается ряд характеристик эффективности. Автор предлагает рассматривать еще одну характеристику для некоторых задач с очередями — среднее время между двумя моментами, когда число ожидающих в очереди превышает определенный уровень. Приводятся результаты для случаев: 1) «нетерпеливые» клиенты (покидающие очередь после фиксированного времени ожидания) без обслуживателей; 2) «нетерпеливые» клиенты и r обслуживателей. С. В. Ефремов

7 В189. Некоторые вероятностные задачи в телефонии. Такач Лайош (Takács L.). «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1960, **4**, № 6, 93—144

Перевод с венгерского (РЖМат, 1959, 7304).

7 В190. Применение теории решений при планировании и использовании телефонного оборудования. Jensen Arne. The applicability of decision theory in the planning and operation of telephone plant. «Teleteknik», 1957, **1**, 126—129 (англ.)

В статье весьма неформально излагается использование теории статистических решений в телефонной технике. Требуется, чтобы для многих целей использовались байесовские решения; этого можно достигнуть некоторым изменением принципа Мо (Moe, Copenhagen Telephone Co., 1950). V. E. Beneš

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 4.

7 В191. Решение, зависящее от времени, для модели водохранилища с пуассоновским притоком. Gani J., Prabhu N. U. The time-dependent solution for a storage model with Poisson input. «J. Math. and Mech.», 1959, **8**, № 5, 653—663 (англ.)

Рассматривается водохранилище, в котором приток воды происходит только дискретными порциями объема h и описывается пуассоновским процессом с параметром λ, а утечка происходит с постоянной скоростью, принимаемой равной единице, если только водохранилище не пусто. Для закона распределения $F(z, t)$ объема воды в момент t при условии, что в начальный момент объем был равен z_0 было ранее получено уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}F(z, t) - \frac{\partial}{\partial z}F(z, t) = -\lambda\{F(z, t) - F(z - h, t)\}.$$

В данной работе получено решение проблемы опорожнения. Именно показано, что

$$g(z_0, z_0 + rh) = e^{-\lambda(z_0 + rh)}\frac{\lambda^r}{r!}\,z_0(z_0 + rh)^{r-1}$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $g(z_0, t)$ — вероятность того, что водохранилище впервые оказалось пустым в момент $t + \tau$, если в момент τ объем воды в нем был z_0. Отсюда выводится, что

$$F(0, t) = e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{[t:h]}\frac{\lambda^j}{j!}\,(t - jh)\,t^{j-1}.$$

Используя эти выражения, авторы получают, что

$$F(z, t) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{r}{n}\right]}\frac{\{\lambda(rh - z)\}^r}{r!}\,e^{-\lambda(rh-z)}\,F(0, z + t - rh).$$

Б. В. Финкельштейн

7 В192. Замечания о водохранилищах с притоком пуассоновского типа. Gani J., Prabhu N. U. Remarks on the dam with Poisson type inputs. «Austral. J. Appl. Sci.», 1959, **10**, № 2, 113—122 (англ.)

Пусть имеется водохранилище, объем воды в котором $Z(t)$ удовлетворяет условию

$$Z(t + \delta t) = \begin{cases} Z(t) + \delta X(t) - \delta t, & \text{если} \quad 0 < Z(t) < K, \\ K - \delta t, & \text{если} \quad Z(t) = K, \\ \delta X(t), & \text{если} \quad Z(t) = 0, \end{cases}$$

где $X(t)$ — пуассоновский процесс с параметром λ и величиной скачка h, а K — объем бассейна. При этих условиях приводится дифференциально-разностное уравнение, которому удовлетворяет

$$F(z, t) = P\{Z(t + \tau) < z / Z(\tau) = z_0\}.$$

Исследуется вопрос о непрерывности и дифференцируемости $F(z, t)$ и дается вывод формулы для определения преобразования Лапласа—Стилтьеса для $F(z, t)$. Далее находится выражение для стационарной функции распределения $\Phi(z) = \lim F(z, t)$ $(t \to \infty)$ и преобразования Лапласа—Стилтьеса этой функции.

Кратко рассматривается случай притока $X(t)$, являющегося сложным пуассоновским процессом.

Б. В. Финкельштейн

7 В193. Зависимые от времени результаты для водохранилищ с регулируемым пуассоновским притоком. Gani J. Time-dependent results for a dam with ordered Poisson inputs. «Nature» (Engl.), 1960, **188**, № 4747, 341—342 (англ.)

Пусть $Z(t)$ — содержание водохранилища в момент времени t, $X(t)$ — приток в момент времени t при установившемся уровне потребления. Тогда объем водохранилища в момент времени $t + \Delta t$ определится из уравнения

$$Z(t + \Delta t) = Z(t) + \Delta X(t) - (1 - \eta)\,\Delta t,$$

где η — доля отрезка времени Δt, в течение которого водохранилище было пусто. $X(t)$ таково, что моменты пополнения водохранилища образуют пуассоновский по-

ток с параметром λ, а размеры пополнения принимают поочередно два значения α_1 и α_2. Тогда процесс $Z(t)$ марковский. Пусть

$$F_i(z_0, z, t) = P\{Z(t) \leqslant z,$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X(t) = n(\alpha_1 + \alpha_2) + \delta_{i1}\alpha_1\}/Z(0) = z_0\}, \quad i = 1, 2,$$

где δ_{i1} — символ Кронекера. Функции $F_i(z_0, z, t)$ удовлетворяют дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial F_i}{\partial z} = -\lambda\{F_i(z_0, z, t) - F_j(z_0, z-\alpha_i, t)\} \text{ (где } j \neq i).$$

Используя известные результаты для распределения вероятностей момента первого опустошения, автор получает выражение для $F_i(z_0, z, t)$. П. А. Строганов

7 В194. Эффективность и надежность систем. Barlow R. E., Hunter L. C. System efficiency and reliability. «Technometrics», 1960, **2**, № 1, 43—53 (англ.)

Система задается случайным процессом $x(t)$. Надежностью системы предложено называть математическое ожидание $R(t) = E\{g(X(t))\}$, где $g(x) = 1$ для благоприятных состояний системы и нулю для остальных. Предельной эффективностью системы автор называет

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t)\, dF(t),$$

где $dF(t)$ характеризует необходимость использования системы в момент t. Для одного частного примера, в котором $X(t)$ оказывается цепью Маркова из трех состояний, вычисляется предельная эффективность системы. Р. Л. Добрушин

7 В195. О некоторых вопросах теории надежности радиоэлектронного оборудования. Левин Б. Р. «Радиотехника», 1960, **15**, № 2, 67—74

Рассматривается матрица $\| A_{ij} \|$ элементов радиосхемы. Для фиксированного интервала времени T элемент A_{ij} характеризуется надежностью p_{ij} — вероятностью того, что за время T не произойдет его отказа. Элементы предполагаются независимыми. Элементы строки матрицы соединяются последовательно (строка отказывает при отказе хотя бы одного из элементов), а взаимное соединение строк — параллельное (схема отказывает лишь при отказе всех строк). Некоторые элементы матрицы оставляются резервными. Находятся точные и асимптотические оценки вероятности отказа всей схемы в зависимости от способа включения резервных элементов. Е. Г. Николаев

7 В196. О последовательном и параллельном сцеплении автоклавов и о теории смешения. Rényi Alfréd. Autoklávok soros és párhuzamos kapcsolásáról és a keverés elméletéről. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1959, **4**, № 2, 155—165 (венг.; рез. русск., англ.)

В настоящей статье исследуется технологический процесс промышленного обогащения бокситов. Имеется r последовательно соединенных автоклавов, в которых непрерывно смешивается бокситовый порошок и натриевая щелочь. Каждый из этих автоклавов ежечасно поглощает v кубометров смеси и в течение часа такое же количество передается в следующий автоклав. Вместимость каждого из автоклавов V кубометров. В автоклавах происходит смешение, которое автор характеризует функцией $F(x)$ распределения времени ξ, которое элементарная частица проводит в автоклаве. Автор занимается так называемым «реальным» смешением, характеризующимся тем, что чем дольше элементарная частица смеси находится в автоклаве, тем больше вероятность скорого выхода ее из аппарата. Автор доказывает, что в этом случае

$$D^2(\xi)/M^2(\xi) < 1,$$

и равенство может быть достигнуто только тогда, когда $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ для $x > 0$, где $\lambda = v/V$ дано. В последнем случае говорят об идеальном смешении, а величину $D^2(\xi)/M^2(\xi)$ автор называет интенсивностью смешения. Кроме того, для случая идеального смешения автор находит вероятность $F_r(t)$ того, что в системе r последовательно соединенных автоклавов частица боксита находится менее t часов. На основании этих результатов можно указать оптимальное соединение автоклавов, для которого $F_r(t_0)$ может быть сделано минимальным. Здесь t_0 означает время, необходимое для желаемой химической реакции в системе автоклавов.

M. Ziermann

7 В197. Исследование производственных поломок и простоев через переходные вероятности. Henn Rudolf. Die Behandlung betrieblicher Störungen und Stauungen durch Übergangswahrscheinlichkeiten. «Schweiz. Z. Volkswirtsch. und Statist.», 1960, **96**, № 1, 35—44 (нем.)

Выводятся формулы для совместного распределения вероятностей поломок двух видов в одном периоде и для нескольких периодов. Исследуется поток заказов, находящихся в очереди, получаемый как наложение потока поступающих заказов, и поток выполненных заказов. При некоторых условиях получены дифференциальные уравнения для определения вероятностей числа ожидающих в очереди и находящихся в работе. Для стационарного случая вычислены математическое ожидание и дисперсия времени ожидания. Исследуется вопрос об обслуживании ремонтной бригадой m однородных машин в предположении показательного закона для времени обслуживания и появления поломок. Формулируется задача об определении оптимального числа ремонтных групп с целью максимизации разности между экономией за счет уменьшения простоев машин и увеличением расходов на содержание ремонтных групп.

Б. В. Финкельштейн

7 В198. Приложение техники организации экспериментов к промышленным испытаниям международного масштаба. Опыты относительно условий прокатки и длительности срока службы огнеупорных сводов мартеновских печей, выполненные под высоким руководством Европейского сообщества угля и стали. Ulmo J. Applications de la technique des plans d'expériences à des essais industriels exécutés à l'échelon international. Les essais de laminage et de tenue en service de réfractaires pour voûtes de fours martin organisés sous l'égide de la haute autorité de la Communauté Européenne du Charbon et de l'Acier. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 563—572 (франц.; рез. англ.)

Описывается техника применения дисперсионного анализа к двум конкретным производственным задачам. Результатов исследования и численных примеров не имеется. С. С. Кислицын

7 В199. Сравнение достоверности методов обнаружения наличия микробов. Malý Vladimír. Srovnávání spolehlivosti metod pro zjišťování přítomnosti mikrobů. «Aplikace mat.», 1960, **5**, № 4, 272—281 (чешск.; рез. русск., нем.)

Методы обнаружения микробов таковы, что их положительный результат указывает на заведомое наличие микробов, однако наличие микробов не обязательно приводит к положительному результату. N проб проверяются k методами. Оцениваются вероятности p_i того, что i-м методом обнаружится наличие микробов, и относительная частота проб с присутствующими микробами. Автор ранее рассматривал проблему для $k=2$ (РЖМат, 1960, 8094); в реферируемой работе изучается случай $k=4$. Из этого случая уже ясно виден подход к случаю произвольного k. Оценки выводятся методом максимального правдоподобия, разбирается также вопрос их существования. Z. Sidák

7 В200. Корреляционный процесс в нервных центрах глаза насекомого. Hassenstein B. A cross correlation process in the nervous center of an insect eye. «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 617—619 (англ.)

Наблюдение за движущимся предметом у животных и человека вызывает физиологическое взаимодействие между соседними зрительными единицами. У насекомых глаза состоят из множества граней, которые действуют в этом случае как зрительные единицы. Поля наблюдения соседних граней не перекрываются. Величина ответной реакции зависит от скорости движущегося предмета и степени его яркости. Производятся опыты с движущимися предметами, оттенки которых меняются случайным образом. Результаты экспериментов наводят автора на мысль, что в глазах насекомых оценка движения в визуальном поле производится путем корреляционного процесса. Б. М. Клосс

7 В201. Эффективность разных схем испытания животных. Smith Charles. Efficiency of animal testing schemes. «Biometrics», 1960, **16**, № 3, 408—415 (англ.)

Сравниваются три метода, используемые для статистической оценки при искусственном скрещивании пород скота: 1) обследуются только испытуемые животные, 2) все животные стада, 3) одно испытуемое животное. Второй метод оказывается удобным. Математический аппарат — нормальное распределение. Н. И. Арбузова

7 В202. Сортировка изделий на основе чувственного восприятия. Gridgeman N. T. Sensory item sorting. «Biometrics», 1959, **15**, № 2, 298—306 (англ.)

Рассматривается вероятностная модель для сортировки изделий на два класса, основанной на чувственном восприятии (например, дегустации). Рассматривается совокупность M изделий, из которых N обладают некоторым характерным свойством (принадлежат к первому классу). Требуется выделить группу из N изделий, обладающих этим свойством. Предполагается, что при просмотре каждого из N изделий с нужным свойством оно с вероятностью p независимо от других изделий отбирается в первый класс и всего таким образом отбирается $X \leqslant N$ изделий. Затем выборка дополняется до нужного объема N случайным выбором без возвращения $N—X$ изделий из совокупности $M—N$ изделий, не обладающих нужным свойством и $N—X$ изделий им обладающих. Исследуется случайное число R изделий с нужным свойством в окончательной выборке объема N. Его распределение оказывается комбинацией биномиального и гипергеометрического распределений. Выписываются формулы распределения вероятностей и первые моменты для R. Обсуждается возможность применения полученных формул. В. И. Бабкин

7 В203. Двухальтернативная обучающая ситуация с частичным поощрением. Hanania Mary I. Two-alternative learning situations with partial reinforcement. «Psychometrika», 1960, **25**, № 1, 77—90 (англ.)

Рассматривается двухальтернативная схема обучения с так называемым «частичным поощрением»: в каждом испытании испытываемый должен дать ответ A или B. Далее, экспериментатор независимо и тайно от испытуемого выбирает с вероятностью π ответ A, с вероятностью $1-\pi$ ответ B и ответ испытуемого вознаграждается, если он совпадает с ответом экспериментатора. Из опытных данных выводится, что при увеличении числа испытаний вероятность, что испытуемый отвечает A, стремится к π. Ввиду этого вводится следующая статистическая модель: предполагается, что вероятность p_j того, что в j-м испытании дается ответ A, такова, что

$$p_{j+1} - \pi = \theta^{y_j}\ \omega_j (p_j - \pi),$$

где y_j равно 1, если в j-м испытании ответ поощрялся, и 0 в противоположном случае, θ характеризует эффективность поощрения и ω_j — обучение за счет иных факторов. В предложенной статистической модели вопрос, будут ли вознаграждение и невознаграждение эквивалентны в их воздействии на обучение, сводится к оценке сложной гипотезы на многомерном распределении вероятностей. Описан асимптотически локально наилучший подобный критерий для проверки альтернативы: вознаграждение и невознаграждение равноэффективны ($\theta = 1$) или вознаграждение более эффективно ($\theta < 1$). Дан иллюстрирующий пример из экспериментальных данных. В. И. Бабкин

7 В204. Избыточность как экспериментальная величина. Staniland Alan. Redundancy as an experimental variable. «Quart. J. Exptl Psychol.», 1960, **12**, № 3, 149—161 (англ.)

Рассматривается эмпирическая избыточность выборки (понимаемой в смысле теории информации). На многочисленных примерах иллюстрируется ее вычисление, указывается ее отличие от меры избыточности по Миллеру (Miler G. A., Language and Communication, New York, 1951). К. А. Горькова

7 В205. О случайных помехах в системе с линейным затуханием. Malecot G. Sur l'introduction de chocs aléatoires dans un système linéaire amorti. «Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1955, 62, Paris», 1956, 33—43. Discuss., 44—45 (франц.)

Величины $q_j(n)$ определяются соотношениями

$$q_j(n) = a_j(n) + \sum_{k=1}^{r} l_{jk} q_k (n-1) + \varepsilon_j (n-1)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, \ldots),$$

где $a_j(n)$ — известные функции; $E_{n-1}(\varepsilon_j(n-1)) = 0$, $E_{n-1}(\varepsilon_i(n-1)\,\varepsilon_j(n-1)) = w_{ij}(n-1)$ (символом E_{n-1} обозначено математическое ожидание величины при известных значениях $q_j(n-1)$). Рассмотрен ряд вопросов, связанных с этой моделью (например, о нахождении и асимптотическом поведении априорных математических ожиданий и ковариаций $q'_j(n) = q_j(n) - a_j(n)$, об оценке l_{ik} и др.). Указывается на эконометрическое происхождение рассматриваемой схемы. С. С. Кислицын

7 В206. Некоторые дискретные распределения, связанные с одним уравнением в конечных разностях. Santacroce Guido. Di alcune distribuzioni di frequenza ad argomento discontinuo connesse a una equazione alle differenze finite. «Giorn. econ. e ann. econ.», 1958, **17**, № 7-8 390—405 (итал.)

7 В207. Приближенный индекс асимметрии кривой концентрации. Giurovich Gualtiero. Su un indice approssimato di asimmetria della curva di concentrazione. «Statistica», 1959, **19**, № 4, 463—482 (итал.)

7 В208. Об оценке средней длины цепей в системах коммуникаций. Taga Yasushi, Suzuki Tatsuzo. On the estimation of overage length of chains in the communication-pattern. «Ann. Inst. Statist Math.», 1958, **9**, № 3, 149—156 (англ.)

Имеется N элементов, причем между некоторыми из них есть направленная связь. Под l-звеном понимается любая последовательность из l—1 элементов, из которых первый связан со вторым в направлении ко второму и т. д. L-цепью называется l-звено, первый элемент которого является одной из начальных точек, а последний — одной из конечных. Предполагается, что циклов в системе нет. Исследованы статистические оценки числа l-звеньев, L-цепей и средней длины цепи, основанные на некоторой процедуре выбора. Указываются социологические приложения. С. С. Кислицын

7 В209 К. Каналы связи со случайными характеристиками, теория информации, радиорелейные линии. Ред. Сифоров В. И. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова, вып. 3». М.—Л., Госэнергоиздат, 1959, 152 стр., илл., 5 р. 30 к.

7 В210 К. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Изд. 2-е, переработ. и доп. Пугачев В. С. М., Физматгиз, 1960, 883 стр., илл., 32 р. 40 к.

Во втором издании заново написан и расширен раздел, посвященный теории оптимальных систем на основе метода канонических представлений случайных функций (гл. 16—18 вместо одной гл. 16 в первом издании (РЖМат, 1959, 7207)), заново изложена теория линейных систем (гл. 12). Введено значительное количество примеров, иллюстрирующих применение теории случайных функций к задачам автоматики и радиотехники.

А. Х. Заславский

7 В211 К. Информационный критерий для замкнутых систем автоматического регулирования. Чжан С. С. Л. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 19 стр., илл.

7 В212 К. Вопросы статистической теории систем автоматической оптимизации. Фельдбаум А. А. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 15 стр., илл.

7 В213 К. Метод определения оптимальной системы при нелинейной зависимости наблюдаемой функции от параметров сигнала. Пугачев В. С. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 10 стр.

7 В214 К. Применение уравнений Колмогорова для исследования систем автоматического управления со случайными возмущениями. Барретт Д. Ф. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 16 стр., илл.

7 В215 К. О действии шумов в нелинейных системах автоматического регулирования. Блэчман Н. М. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 9 стр.

7 В216 К. Смешанные системы регулирования со многими переменными. Эмара Р. С. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 14 стр., илл.

7 В217 К. Анализ и оптимизация одного класса нелинейных импульсных систем для случайных процессов. Прасад Т. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 26 стр., илл.

7 В218 К. Статистический анализ систем автоматического сопровождения. Руина Дж. П., Ван-Валькенбург М. Э. (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 15 стр., илл.

7 В219 К. Проблема оценки параметров. Вестготт (Междунар. федерация по автомат. упр. 1-й Междунар. конгресс по автомат. упр.). М., АН СССР, 1960, 22 стр., илл.

7 В220 К. Математическая статистика в технологии машиностроения. Солонин И. С. Москва — Свердловск, Машгиз, 1960, 175 стр., илл., 6 р. 30 к.

В гл. I даются без доказательств краткие сведения из математической статистики. Гл. II посвящена применению метода выборок и метода точечных диаграмм в анализе технологических процессов. В гл. III обсуждается задача вычисления корреляционных связей между отдельными факторами процесса и приемы обработки экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. В гл. IV автор предлагает комбинированный метод расчета суммарной погрешности обработки при работе на настроенных станках токарного типа, учитывающий случайные и неслучайные причины погрешностей.

А. Х. Заславский

7 В221 К. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей [Учебник для геод. вузов и фак.]. Чеботарев А. С. М., Геодезиздат, 1958, 606 стр., илл., 14 р. 50 к.

В соответствии с программой геодезических вузов первые две части учебника строятся на основе опытных данных, а затем дается теоретическое обоснование способа наименьших квадратов. Все примеры доводятся до числа. В 1-й части излагаются на эвристическом уровне общие свойства ошибок измерений и методы оценки точности наблюдения в геодезии. 2-я и 3-я части содержат широкое изложение способа наименьших квадратов и несколько схем точного и приближенного решения системы нормальных уравнений. Большое внимание уделяется оценкам точности результатов наблюдения. В 4-й части излагаются элементы теории вероятностей и математической статистики, в том числе оценка параметров нормального распределения и применение критерия согласия Колмогорова в геодезии. А. Х. Заславский

7 В222 Д. Помехоустойчивость приема дискретной информации в каналах с переменными параметрами (Сравнение различных систем связи и возможность использования электронно-вычислительных машин). Кловский Д. Д. — Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. электротехн. ин-т связи, Л., 1960

См. также: 7А134, 7А141, 7А192, 7А199, 7Б197, 7Б306, 7Б308, 7Б311, 7В237, 7В244, 7В259, 7В275, 7В276, 7В294, 7В299К

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

7 В223. Приближенное решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Куликов Н. К. «Прикл. матем. и механ.», 1960, **24**, № 4, 755—759

Излагается предложенный автором (РЖМат, 1961, 5Б122) метод последовательных приближений для решения линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для уравнения $y'' + f(x)\,y' + F(x)\,y = 0$ нулевое приближение получается в виде

$$y = \frac{e^{-\frac{m}{2}(x-x_0)}}{F(x)}\left[(ab - cd)\operatorname{ch} k(x-x_0) + (bd - ack^2)\times \right.$$
$$\left. \times \frac{\operatorname{sh} k(x-x_0)}{k}\right],$$

где

$$a = \frac{F(x_0)\,y_0 + (f(x_0) - m)\,y_0'}{p},\quad y_0 = y(x_0),\quad y_0' = y'(x_0),$$

$$b = p + \frac{mc}{2},\quad c = f(x) - m,\quad d = y_0' + \frac{am}{2},\quad k^2 = \frac{m^2}{4} - p \neq 0,$$

m и p — неопределенные параметры; формулы применимы и в случае чисто мнимого k. Указываются различные способы выбора неопределенных параметров m и p, при которых нулевое приближение будет близким к точному решению в тех случаях, когда функции $f(x)$ и $F(x)$ не слишком сильно отличаются от постоянных.

А. Ф. Филиппов

7 В224. О связи между различными приближенными методами исследования нелинейных колебаний. Magnus K. Über den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen. «Z. angew. Math. und Mech.», 1957, **37**, № 11—12, 471—485 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Рассматривается система общего вида

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^{n} c_{rs}x_s + g_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (r=1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$

а также система частного вида

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^{n} f_{rs}(x_s, t) \quad (r = 1, 2, \ldots, n), \quad (2)$$

где x_r — координаты системы, c_{rs} — постоянные, g_r, f_{rs} — нелинейные функции своих аргументов, имеющие разрывы первого рода, периодические по t с периодом $2\pi/\omega$. Стационарные колебания в системах (1), (2) аппроксимируются гармоническими колебаниями с частотой ω, устанавливающимися в «заменяющей» линейной системе

$$\dot{x}_r = \sum_{s=1}^{n} (a_{rs}x_s + a^*_{rs}\dot{x}_s) \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Показывается, что выражения для коэффициентов a_{rs} и a^*_{rs} «заменяющей» системы (3), получаемые при использовании различных приближенных методов (метод гармонического баланса Крылова — Боголюбова, метод вариации постоянной, метод энергетического баланса и метод Ритца — Галеркина), совершенно идентичны. Отсюда делается вывод, что все эти методы (в предположении, что аппроксимирующие функции в методе Галеркина гармонические) не имеют друг перед другом каких-либо принципиальных преимуществ. Если же при пользовании методом Галеркина применять негармонические аппроксимирующие функции (трапецеидальные, прямоугольные, треугольные и другие периодические кривые), то иногда можно достигнуть более точной аппроксимации периодических решений нелинейной системы. Метод Галеркина в последней его форме иллюстрируется на двух примерах, а именно, на примере исследования автоколебаний в системе

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x = k\,\mathrm{sgn}\,\dot{x},$$

где $D < 0$, и на примере исследования вынужденных колебаний в системе

$$T\dot{x} + x = k\psi_R(\gamma), \quad \gamma = \omega t,$$

где $\psi_R(\gamma)$ — функция, описывающая прямоугольные колебания. Н. Т. Кузовков

7 В225. Один метод численного решения простой нелинейной краевой задачи с применением к краевой задаче небесной механики. Schlaepfer F. Eine Methode zur numerischen Lösung einfacher nichtlinearer Randwertaufgaben mit Anwendung auf ein Randwertproblem der Himmelsmechanik.» Z. angew. Math. und Phys.», 1960, **11**, № 6, 514—517 (нем.; рез. англ.)

Для решения краевой задачи $d^2x/dt^2 = -f(x, t)$, $x(-1) = a$, $x(1) = b$, последняя заменяется интегральным уравнением

$$x(t) = x_0(t) + \int_{-1}^{1} K(t, \tau) f(x, \tau)\, d\tau, \quad (1)$$

где $x_0(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, $K(t, \tau) = (1+t)(1-\tau)/2$, если $-1 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant 1$, $K(t, \tau) = (1-t)(1+\tau)/2$, если $-1 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$. Уравнение (1) решается обычным методом последовательных приближений. При этом для вычисления интеграла в (1) используется специальная квадратурная формула (обычные формулы типа Ньютона — Котеса непригодны, так как ядро $K(t, \tau)$ при $t = \tau$ терпит разрыв). В. К. Саульев

7 В226. О приближенном решении дифференциальных уравнений методом Чаплыгина. Dailidė J., Matulionis J. Apie Čaplygino metodą apytiksliai sprendžiant diferencialines lygtis. «Kauno politechn. inst. darbai, Тр. Каунасск. политехн. ин-та», 1960, **14**, № 1, 59—66 (лит., рез. русск.).

При решении дифференциальных уравнений методом Чаплыгина возникает вопрос о знаке так называемого остаточного члена, от которого зависит метод решения задачи. Во избежание этого в данной работе применен другой способ, также основанный на методе Чаплыгина и не зависящий от знака остаточного члена. Это достигается за счет некоторого уменьшения точности решения. Резюме авторов

7 В227. О решении систем разностных уравнений. Русанов В. В. «Докл. АН СССР», 1961, **136**, № 1, 33—35

Для решения систем эллиптических пятиточечных сеточных уравнений описан прямой метод, являющийся комбинацией метода матричной прогонки (РЖМат, 1960, 5924К) и метода исключения с выборкой главного элемента. При этом исключается обращение особенных подматриц, что может иметь место при использовании обычного метода матричной прогонки, где порядок действий строго определен. Отмечается, что метод неоднократно проверялся на машине «Стрела». В. К. Саульев

7 В228. Об одном приближенном способе решения некоторых статических и динамических задач теории пластин и балок. Мартынов И. В. «Тр. Научно-техн. о-ва судостроит. пром-сти», 1960, вып. 35, 85—118

Проводится исследование свободных поперечных колебаний сжатой или растянутой балки, изгиба прямоугольной пластины, лежащей на сплошном упругом основании, при одновременном действии сжатия и поперечной нагрузки, и свободных поперечных колебаний прямоугольной пластины. При решении всех задач при произвольных граничных условиях получены приближенные расчетные формулы путем единообразных преобразований: дифференциальное уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого находится в форме разложения искомой функции в бесконечный ряд. Промежуточные выкладки аналогичны известным выкладкам для свободно опертой балки или пластины. Возможность такого простого подхода к решению задач обусловлена использованием метода контурных интегралов и введением в формулы вместо отношения двух функций (функционального коэффициента), не зависящей от координат и времени, величины μ (осредненного значения функционального коэффициента). Дано обоснование формулы для осреднения коэффициентов μ при помощи метода Бубнова — Галёркина. Отмечается, что предложенная форма решения имеет преимущества перед известными ранее, так как она требует минимума вычислительной работы. Приводится таблица рекомендуемых для пластин со свободными краями фундаментальных функций и коэффициентов μ. И. Ф. Шелихова

7 В229. Изгиб пластины переменной толщины, имеющей форму кругового прямоугольника и закрепленной по меньшему дуговому краю. Кантор Б. Я. Згин пластини змінної товщини, яка має форму кругового прямокутника і закріплена по меншому дуговому краю. «Прикл. механіка», 1960, **6**, № 4, 420—428 (укр.; рез. русск., англ.)

Излагается приближенный метод расчета на изгиб консольных пластин переменной жесткости, в котором интегро-дифференциальное уравнение равновесия приближенно заменяется системой интегральных уравнений, аппроксимируемых затем системой алгебраических уравнений. Расчеты конкретных пластин выполнены на ма-

шине «Стрела». Результаты расчета двух пластин сравниваются с экспериментальными результатами.

Резюме автора

7 В230. Расчет прямоугольных пластин на упругом полупространстве методом сеток. Соломин В. И. «Строит. механ. и расчет сооруж.», 1960, № 6, 12—17

Краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения аппроксимируется системой простейших сеточных уравнений. Приведен анализ некоторых результатов.

7 В231. Обобщение метода конечных разностей на случай неравномерной сетки. Kron Gabriel. A generalization of the calculus of finite differences to nonuniformly spaced variables. «Commun. and Electronics», 1958, № 38, 359—544 (англ.)

Речь идет о применении моделирующих электрических сеток с неравномерно расположенными узлами к решению краевых задач для дифференциальных уравнений.

В. К. Саульев

7 В232. Одномерные изэнтропические неустановившиеся релятивистские течения газа. Ефимов З. Ф. «Уч. зап. Физ.-матем. фак. Кирг. ун-т», 1957, вып. 4, ч. 2, 85—109

Рассматривается численное решение задачи Коши для одномерного изэнтропического движения релятивистского газа методом характеристик.

7 В233. Некоторые численные решения в сверхзвуковом потоке. Van Dyke M. D. Some numerical solutions in hypersonic flow. «Hyperson. Flow. (Bristol, 1959). London, Butterworths Scient. Publs», 1960, 239—246. Discuss., 247—252 (англ.)

Описан численный метод для расчета потока вблизи носа тела в сверхзвуковой области, где метод характеристик неприменим. При этом решается обратная задача: форма ударной волны предполагается заданной и ищется форма тела (следовательно, интегрирование осуществляется от ударной волны в направлении тела). В качестве примеров рассмотрены случаи сферы и некругового конуса.

В. К. Саульев

7 В234. К практическому вычислению собственных значений, входящих нелинейно. Применение метода к исследованию устойчивости (явление опрокидывания). Müller P. H., Kummer H. Zur praktischen Bestimmung nichtlinear auftretender Eigenwerte Anwendung des Verfahrens auf eine Stabilitätsuntersuchung (Kipperscheinung). «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 1-3, 136—143 (нем.)

Авторы обобщают известный (Lösch F., Z. angew. Math und Mech, 1944, **24**, 35—41) метод усечения для нахождения собственных значений интегрального уравнения вида

$$\varphi(x) = \int_a^b K_0(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \lambda\int_a^b K_1(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \lambda^k \int_a^b K_k(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (1)$$

где ядра $K_\nu(x,\xi)$ $(\nu = 0,1,\ldots,k)$ измеримы по Лебегу и интегрируемы с квадратом. Сущность метода состоит в том, что с помощью полной ортонормированной системы $\{\psi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ из L^2 от уравнения (1) переходят к матричной задаче

$$v = K_0 v + \lambda K_1 v + \ldots + \lambda^k K_k v, \qquad (2)$$

где K_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$ — бесконечные матрицы, а вектор $v \in l^2$, элементы которых определяются соотношениями

$$K_\nu^{ij} = \int_a^b\int_a^b K_\nu(x,\xi)\psi_j(\xi)\psi_i(x)\,d\xi\,dx,$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, i, j = 1, 2, \ldots),$$

$$v_i = \int_a^b \varphi(x)\psi_i(x)\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Спектры уравнений (1) и (2) тождественны. От системы (2) переходят затем к усеченным системам вида

$$r = K_0^{[n]} r + \lambda K_1^{[n]} r + \ldots + \lambda^k K_k^{[n]} r \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (3)$$

где $K^{[n]}$ — n-мерные матрицы, элементы которых совпадают с соответствующими элементами первых n строк матриц K_ν. Корни алгебраических уравнений kn-й степени доставляют приближения к собственным значениям уравнения (1). Доказано, что с ростом n они сходятся к искомым собственным значениям уравнения (1) и, наоборот, каждое собственное значение (1) является предельной точкой для этих приближенных значений. Скорость сходимости существенно зависит от специально выбираемой ортонормированной системы $\{\psi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Оценки погрешности метода не приводится. В заключение метод усечения применяется к исследованию устойчивости, в частности, к расчету опрокидывающей нагрузки односторонне зажатой балки. Результаты расчета сравниваются с соответствующими расчетами по методу Прандтля.

Н. Я. Лященко

7 В235. Метод проекций. Pietrzykowski Tomasz. Projection method. «Prace zakł. apar. mat. PAN», 1960, A, № 8, 9 pp. (англ.)

Предлагается метод для построения максимального числа линейно независимых решений системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (1)$$

Исходя из системы S_0 векторов $s_0^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)$; $s_0^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $s_0^{(n)} = (0, 0, \ldots, 1)$, подобно методу Перселла, рекуррентно по формулам (2) строятся системы S_k векторов $s_k^{(0)}, s_k^{(1)}, \ldots, s_k^{(N_k)}$, которые дают максимальное число линейно независимых решений первых k уравнений системы (1). Формулы (2) имеют вид

$$s_{k+1}^{(j)} = q + \frac{(a_{k+1}, q) - \alpha_{k+1}}{(a_{k+1}, q - s_k^{(j+k)})}(s_k^{(j+1)} - q), \qquad (2)$$

где $a_{k+1} = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, \ldots, a_{k+1,n})$; $j = 0, 1, \ldots, N_{k-1}$; $q = s_k^{(i_k)}$, если существует вектор $s_k^{(i_k)}$ такой, что

$$(s_k^{(i_k)}, a_{k+1}) \neq (s_k^{(i)}, a_{k+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N_k.$$

В противном случае $q = s_k^{(0)} + \tau(s_k^{(1)} - s_k^{(0)})$, где $s_k^{(0)}$ и $s_k^{(1)}$ таковы, что $(a_{k+1}, s_k^{(0)}) \neq (a_{k+1}, s_k^{(1)})$ и число

$$\tau \neq \frac{(a_{k+1}, s_k^{(j)} - s_k^{(0)})}{(a_{k+1}, s_k^{(1)} - s_k^{(0)})}, \quad j = 0, 1, \ldots, N_k.$$

Вырожденные случаи: а) $S_k \equiv S_{k+1}$, если $(s_k^{(j)}, a_{k+1}) = \alpha_{k+1}$, $j = 0, 1, \ldots, N_k$; б) S_{k+1} пусто, если $(s_k^{(0)}, a_{k+1}) = (s_k^{(1)}, a_{k+1}) = \ldots = (s_k^{(N_k)}, a_{k+1}) \neq \alpha_{k+1}$. Схема метода при проведении вычислений на быстродействующих машинах позволяет ограничиться $n^2/4$ ячейками оперативной памяти.

В. Н. Кублановская

7 В236. Программирование некоторых методов решения линейных алгебраических уравнений на релейной автоматической машине FACOM-128B. Yamashita H. Programming of linear algebraic equation with large-scale automatic relay computer FACOM-128B. «Sympos. Questions Numer. Analysis, Rome, 1958». Rome, s. a., 4—19 (англ.)

Описывается опыт применения некоторых методов (методы Гаусса, Холецкого, Юно, сопряженных градиентов, квадратных корней и Зейделя) для решения линейных систем на машине FACOM-128B. Приводится характеристика машины, некоторые программы и временные характеристики прохождения вычислений по указанным методам. В. Н. Кублановская

7 В237. Влияние округления на линейные итерационные вычисления. Fabian Václav. L'influence de l'arrondissement sur les évaluations numériques linéaires. «Чехосл. матем. ж.», 1958, **8**, № 2, 203—221 (франц.; рез. русск.)

Исследуется влияние случайного округления, предложенного Форсайтом, на линейный векторный итерационный процесс вида $x_i = A_i x_{i-1} + y_i$. Округление на i-ом шагу путем прибавления ошибки округления ε_i приводит к последовательности ξ_n, удовлетворяющей соотношениям $\xi_0 = x_0$, $\xi_i = A_i \xi_{i-1} + y_i + \varepsilon_i$. При случайном округлении ε_i, а также ξ_i являются векторными случайными переменными, обладающими следующими свойствами: 1) ожидаемое значение $E\xi_n$ равно x_n; 2) матрицу ковариантности $D(\xi_n - x_n)$ можно оценить непосредственно аналитическим путем или простым методом типа метода Монте-Карло; 3) свойство сходимости, доказанное автором, дополнено дальнейшим результатом более специального характера.

Резюме автора

7 В238. Оценка ошибки округления в линейных итерационных процессах, в частности, при решении методом Зейделя задачи Дирихле для квадрата 10×10. Fabian Václav. Odhad chyby zaokrouhlování při lineárních iteračních procesech, zejména při seidelově řešení dirichletova problému pro čtverec 10×10. «Aplikace mat.», 1958, **3**, № 1, 22—44 (чешск.; рез. русск., франц.)

Работа посвящена конкретным приложениям общих результатов, которые автор получил в другой своей работе (реф. 7 В237). Производятся численные оценки величины погрешности, получающейся в результате округления в специальном случае итерации по Зейделю (Либману), при решении задачи Дирихле на квадрате методом сеток. Анализируется погрешность обычного округления и случайного округления, предложенного Форсайтом: число a из интервала $<0,1>$ округляется с вероятностью a на число 1 и с вероятностью $1-a$ на число 0. Конкретно производится округление при помощи случайных чисел.

I. Babuška

7 В239. Оценка погрешности при численном обращении матриц. Jörgens Konrad. Fehlerabschätzung für die numerische Inversion von Matrizen. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, Sonderh., 15 (нем.)

Приводится оценка для линейной части погрешности обратной матрицы, а при некоторых условиях, накладываемых на погрешности округления, и оценка для полной погрешности. Предполагается, что обращение матрицы производится по методу Гаусса. Доказательства автор предполагает опубликовать в другом месте.

В. Л. Загускин

7 В240. Замечание, касающееся памяти машины, необходимой при решении систем линейных уравнений. Łukaszewicz Leon. Note on computer storage requirements for solving linear system of equations. «Prace zakł. apar. mat. PAN», 1960, **A**, № 6, 3 pp. (англ.)

Предлагается одна из схем метода исключения, позволяющая ограничиться только $\left(\frac{1}{4}n^2 + 2n + W\right)$ ячейками оперативной памяти для решения линейных систем (n — порядок матрицы системы, W — число ячеек памяти, занятое программой). В. Н. Кублановская

7 В241. Об итеративном решении систем линейных уравнений. Тодоров Марко. Върху итеративното решаване на системи линейни уравнения. «Научни тр. Висш. ин-т механиз. и електриф. селското стоп.-Русе», 1959, **2**, 249—265 (болг.; рез. русск., нем.)

Для решения линейной системы $x = Bx + y$ приводятся два итерационных процесса, являющиеся видоизменениями метода простой итерации (первый метод) и метода Зейделя (второй метод). Последовательные приближения $x^{(k)}$ строятся по рекуррентным формулам:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + y + \alpha^{(k)} b \quad \text{для 1-го процесса,}$$

$$x^{(k+1)} = Nx^{(k+1)} + Qx^{(k)} + y + \alpha^{(k)} q \quad \text{для 2-го процесса,}$$

где

$$b = Be,\ q = Qe,\ e = (1, 1, \ldots, 1)'.$$

Оба процесса являются процессами полной координатной релаксации. Множитель релаксации $\alpha^{(k)}$ находится из условия минимума функционала $(\Delta\bar{x}^{(k+1)}, \Delta\bar{x}^{(k+1)})$, где $\Delta\bar{x}^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} - \alpha^{(k)} e$. Устанавливается необходимое и достаточное условие сходимости. Приводится иллюстрирующий пример. В. Н. Кублановская

7 В242. Обзор некоторых замкнутых методов обращения матриц. Householder Alston S. A survey of some closed methods for inverting matrices. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1957, **5**, № 3, 155—169 (англ.)

Приводится краткий обзор замкнутых (т. е. прямых методов, приводящих к точному решению за конечное число шагов) методов обращения матриц. Большое внимание уделяется методам факторизации, при которых данная матрица представляется в виде произведения двух легко обратимых матриц. Библ. 15 назв.

7 В243. Об ускоренном «уточнении корней вековых уравнений» по методу Маянца. Лившиц Б. Л. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 6, 1295—1298

Для решения уравнения $(W - \lambda K)X = 0$ методом Маянца требуется на каждом шагу итерационного процесса находить величины X_k и $\partial X_k/\partial\lambda$ как решения линейных систем $(n-1)$ порядков. Рассматривая X' как функцию от параметра λ, автор предлагает указанные величины находить из ряда Тейлора $X' = X_0' + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_0)^n$, если он абсолютно сходится. Выводятся полезные рекуррентные соотношения между коэффициентами этого ряда. В. Н. Кублановская

7 В244. Об одном методе вычисления собственных значений и его приложения к статистическому анализу. Akaike Hirotugu. On a computation method for eigenvalue problems and its application to statistical analysis. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1958, **10**, № 1, 1—20 (англ.)

Во многих задачах математической статистики (корреляционный анализ, «квантизация» см. РЖМат, 1961, 2В185) нужно решить проблему отыскания собственных чисел и собственных векторов уравнения

$$Ax = \lambda Bx, \qquad (1)$$

где матрицы могут быть высокого порядка. Для решения предлагаются разновидности метода наискорейшего спуска, причем можно избежать вычисления B^{-1}. Например, направление спуска может задаваться формулой $\xi = Ax - [(Ax, x)/(Bx, x)]Bx$, где x — предыдущее приближение к собственному вектору. Затем максимизируется $(A(x+\lambda\xi), (x+\lambda\xi))/(B(x+\lambda\xi), x+\lambda\xi)$ (квадратное уравнение для λ). Если x уже достаточно близок к собственному вектору, то во избежание потери точности формула для λ преобразуется; можно и прямо применить метод линейных поправок, решая уравнения для поправки $(A - \lambda_1 B)\varepsilon = (A - \lambda_1 B)x$, $(\varepsilon, x) = 0$, где $\lambda_1 = (Ax, x)/(Bx, x)$ — приближение λ (с двойной точностью), x — приближенный собственный вектор. Для одной из вычислительных схем обосновывается сходимость именно к наибольшему собственному числу; кроме того, дается метод проверки того, что найденное

вместе со своим собственным вектором собственное число действительно наибольшее. В качестве обобщений указываются метод покоординатного спуска и метод максимизации $(Ax, x)/(Bx, x)$ на более чем одномерном линейном многообразии, проведенном через приближение к собственному вектору x. Приведены примеры задач из статистики, приводящих к (1) и числовые примеры. М. Л. Бродский

7 В245. Замечание о вычислении собственных значений. Andrus Jan F. Note on eigenvalue computation. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1960, **3**, № 11, 617 (англ.)

Отмечается, что лемма (для любого единичного вектора v и любого ненулевого вектора x существуют такие единичный вектор u и вещественное число θ, что $(E - 2uu')\, x = e^{i\theta} \| x \| v$) при вычислении собственных значений и собственных векторов матриц может быть использована для 1) сведения данной матрицы к подобной почти треугольной матрице; 2) для вычисления определителя матрицы; 3) для сведения матрицы к треугольной матрице. В. К. Саульев

7 В246. Вычисление определителей, характеристических уравнений и их корней для некоторого класса матриц специального вида. Roy S. N., Greenberg B. G., Sarhan A. E. Evaluation of determinants, characteristic equations and their roots for a class of patterned matrices. «J. Roy. Statist. Soc.», 1960, **B 22**, № 2, 348—359 (англ.)

Рассматриваются матрицы вида

$$D_{a_i} + \alpha bb'; \ \begin{pmatrix} kE_n & aI \\ aI & mE_p \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} g & ke' \\ ke(c-d)\,E_{n-1} + dI & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} mE_k & I & I \\ I & mE_{k-1} & I \\ I & I & mE_{k-1} \end{pmatrix},$$

где D_{a_i} — диагональная матрица; b — вектор; E_r — единичная матрица порядка r; I — матрица, все элементы которой равны 1; e — единичный вектор; α, k, a, m, g, c, d — числа. Выводятся формулы для вычисления определителей и корней характеристических уравнений указанных видов матриц. В. Н. Кублановская

7 В247. Решение алгебраического уравнения при помощи вычисления высоких степеней присоединенной матрицы с использованием теоремы Кэли-Гамильтона. Krishnamurthy E. V. Solving an algebraic equation by determining high powers of an associated matrix using the Cayley-Hamilton theorem. «Quart. J. Mech. and Appl. Math.», 1960, **13**, № 4, 508—512 (англ.)

Описан метод вычисления корней алгебраического уравнения

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0, \qquad (1)$$

основанный на том, что эти корни являются собственными значениями матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A вычисляются при помощи степенного метода — метода простой итерации $(AX^{(m-1)} = X^{(m)})$. Для ускорения сходимости вычисляются (на основании теоремы Кэли — Гамильтона) степени матрицы A. Кратко рассмотрены случаи близких корней, комплексных корней и кратных корней. Отмечается, что описанный метод вычисления корней уравнения (1) удобен в тех случаях, когда имеющаяся в распоряжении вычислительная машина-аналог лучше приспособлена для оперирования с линейными системами, чем с нелинейным уравнением (1). В. К. Саульев

7 В248. Приближенное вычисление квадратного корня. Baird H. Grace. Finding an approximate square root. «Math. Teacher», 1960, **53**, № 6, 470 (англ.)

7 В249. Приближенное решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней. Čajka Josef. Příspěvek k přibližnému řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně. «Aplikace mat.», 1958, **3**, № 5, 360 –371 (чешск.; рез. русск., нем.)

Разработан метод приближенного решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней. Он состоит в установлении коэффициентов A и B квадратного многочлена $p^2 + Ap + B$ так, чтобы многочлен $p^2 + Ap + B$ был делителем данного многочлена $f(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0$. Если степень многочлена $f(p)$ равна 3, то для коэффициентов A и B имеют место соотношения

$$A = G_1(A, B) = a_2 - \frac{a_0}{B}, \quad B = G_2(A, B) = a_1 - a_0 \frac{A}{B}.$$

Если степень многочлена $f(p)$ равна 4, то

$$A = G_1(A, B) = a_3 - \frac{1}{B}\left(a_1 - a_0 \frac{A}{B}\right),$$

$$B = G_2(A, B) = A^2 - a_3 A + a_2 - \frac{a_0}{B}.$$

Приближенные значения A и B можно в таком случае установить графически с помощью кривых $A = G_1(A, B)$ и $B = G_2(A, B)$. Описана также простая итерация, с помощью которой можно улучшить приближенные значения A и B, установленные графически. Если $f(p) = (p^2 + Ap + B) f_2(p)$, то корни уравнения $f(p) = 0$ получаются как корни уравнений $p^2 + Ap + B = 0$ и $f_2(p) = 0$. M. Šisler

7 В250. О разрешимости полинома однородным операционным циклом. Тлегенов К. Б. «КазССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ.», 1957, вып. 6(10), 97—107

7 В251. Улучшение метода итераций для решения системы нелинейных уравнений. Zeuli Tino. Miglioramentodel metodo d'iterazione per la risoluzione dei sistemi di equazioni non lineari. «Atti Accad. Sci. Torino». Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1955—1956, **90**, 362—368 (итал.)

Рассматривается итерационный метод нахождения корней системы нелинейных уравнений. Пусть (X, Y) — первое приближение к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y). \end{cases} \qquad (1)$$

Полагая

$$m_1 = \varphi'_x(X, Y), \ m_2 = \varphi'_y(X, Y), \ n_1 = \psi'_x(X, Y),$$

$$n_2 = \psi'_y(X, Y), \ I = \begin{vmatrix} 1 - m_1 & -m^2 \\ n_1 & 1 - n^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

и записывая систему (1) в виде

$$x - m_1 x - m_2 y = \varphi(x, y) - m_1 x - m_2 y \equiv F(x, y),$$

$$y - n_1 x - n_2 y = \psi(x, y) - n_1 x - n_2 y \equiv G(x, y),$$

для лучшей аппроксимации к решению системы (1) имеем

$$x = (1 - n_2)\, F/I + m_2 G/I, \ y = n_1 F/I + (1 - m_1)\, G/I.$$

E. Frank

Из Math. Revs., 1957, **18**, № 8, 677.

7 В252. Некоторые применения блочных матриц к групповому уравниванию сетей триангуляции с измеренными направлениями. Дьяченко Л. Ф. «Изв. высш. учебн. заведений. Геод. и аэрофотосъемка», 1960, № 3, 15—29

Рассматриваются некоторые случаи применения блочных матриц к групповому уравниванию по способу условных наблюдений сетей триангуляции с измеренными направлениями. Выведены необходимые расчетные формулы для общего случая группового уравнивания непосредственных измерений, связанных условиями.

При этом система матричных уравнений поправок представляет обобщение системы уравнений поправок, получаемой при классическом уравнивании по способу условных измерений. Аналогично, система нормальных уравнений коррелат представляет обобщение системы скалярных нормальных уравнений коррелат, и для получения ее решения могут быть применены различные способы, являющиеся обобщением хорошо известных способов, например, обобщенный алгоритм Гаусса. Удобнее получать это решение посредством обобщенного алгоритма Банахевича (обобщенного метода квадратных корней), в основе которого лежит представление блочной нормальной матрицы в виде произведения двух транспонированных друг другу треугольных матриц. Дается сводка расчетных формул для способа многогруппового уравнивания триангуляции с измеренными направлениями. При этом все действия укладываются в вычислительные схемы двухгруппового уравнивания при внесении в них небольших изменений. И. Ф. Шелихова

7 В253. Решение условных уравнений методом ортогонализации. Дроздов Н. Д. «Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр.», 1960, вып. 42, 23—33

Излагается идея метода ортогонализации и дается подробное описание вычислительной схемы применительно к решению условных уравнений на настольных вычислительных клавишных машинах. Отмечаются главные преимущества ортогонализации линейных систем при уравнивании геодезических измерений перед решением этих систем обычным путем перехода к нормальным уравнениям. Описывается способ исправления результатов вычислений, если они искажены ошибками округления. На конкретном примере показано, что путем наиболее правильной организации вычислений при ортогонализации условных уравнений можно добиться значительного эффекта в экономии времени и средств.
И. Ф. Шелихова

7 В254. О решении итерационными способами систем линейных алгебраических уравнений, получающихся при уравнивании геодезических сетей. Абрамов А. А., Хубларова С. Л. «Тр. Центр. н.-и. ин-та геод., аэросъемки и картогр.», 1960, вып. 135, 53—74

Выясняются некоторые теоретические вопросы применения итерационных методов решения геодезических линейных систем. Рассматривается случай, когда система уравнений погрешностей решена методом итераций без перехода к системе нормальных уравнений. Для систем нормальных уравнений и для систем уравнений погрешностей применены эффективные и простые способы, существенно ускоряющие сходимость простого итерационного процесса и итерационного метода Зейделя. Указывается наиболее выгодный порядок вычислений методом простой итерации с применением изложенного способа ускорения. Приводятся данные материалов по решению больших производственных систем итерационными методами. Излагается схема вычислений, использованная при решении двух больших систем нормальных уравнений на БЭСМ, а также описаны процесс решения больших систем уравнений погрешностей (порядка 800) на БЭСМ и способ ускорения сходимости. Показаны преимущества метода итераций перед прямыми при решении систем на электронных вычислительных машинах. Отмечается, что успешное применение метода итераций возможно также для систем, получаемых при обработке несвободных сетей по способу посредственных измерений.
И. Ф. Шелихова

7 В255. Оценка обусловленности систем нормальных уравнений. Хубларова С. Л. «Тр. Центр. н.-и. ин-та геод., аэросъемки и картогр.», 1960, вып. 135, 75—84

Анализируется связь обусловленности системы нормальных уравнений с методом уравнивания (условных или посредственных измерений). Показано, что при уравнивании свободных сетей методом условных измерений обеспечивается более устойчивое решение по сравнению с методом посредственных измерений. Приведенный экспериментальный материал, характеризующий обработку свободной сети, показывает, что в зависимости от метода уравнивания устойчивость решения системы уравнений меняется на 2—3 порядка. Отмечается, что необходимым условием успешного применения метода посредственных измерений, отличающегося простотой и однообразием операций, является разработка метода улучшения обусловленности системы уравнений, подлежащей решению.
И. Ф Шелихова

7 В256. Обобщенная схема Гаусса решения нормальных уравнений. Мазмишвили А. И., Беляев Б. И. «Тр. Моск. ин-та инж. геод., аэрофотосъемки и картогр.», 1960, вып. 42, 3—18

Дается подробное описание нескольких вариантов обобщенных схем решения нормальных уравнений по способу Гаусса, основанных на применении правил матричной алгебры, в которых все арифметические операции сведены к одному правилу «строка на столбец». Схемы компактны, вычисления по ним могут быть механизированы и каждый этап вычислений содержит надежный контроль. Приводится схема решения нормальных уравнений по методу косвенных измерений и схема решения нормальных уравнений коррелат с оценкой точности для случая условных измерений. Изложенное проиллюстрировано числовыми примерами.
И. Ф. Шелихова

7 В257. Применение краковянов для решения некоторых геодезических задач. Мепуришвили Г. Е. «Научн. тр. Моск. горн. ин-т», 1960, сб. 31, 95—114

Дается краковянная запись некоторых формул, применяемых в геодезии. Например, вместо

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

автор предлагает писать: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{A}{B}$, где

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\beta \\ 1 \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \operatorname{tg}\alpha \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

В. Л. Загускин

7 В258. Об ошибках округления при решении систем нормальных уравнений методом исключения и методом квадратных корней. Сазонов А. З. «Тр. Центр. н.-и. ин-та геод., аэросъемки и картогр.», 1960, вып. 135, 35—51

Рассматриваются наиболее компактные вычислительные схемы для решения систем нормальных уравнений методами исключения и квадратных корней. Выводятся формулы, дающие выражение полной накопленной ошибки округления в искомых неизвестных и позволяющие оценить точность решения системы при работе с фиксированным числом знаков. Получены выражения для средней квадратической ошибки i-го неизвестного, полезные при исследовании вопросов, связанных с выбором способов уравнивания, способов размещения уравнений и неизвестных в системе, при сравнении методов решения систем и других вопросов, возникающих при уравнивании больших геодезических построений. Проведено сравнение точности решения методом исключения и методом квадратных корней по величинам остаточных свободных членов, которое показывает, что метод квадратных корней дает более высокую точность результатов, причем повышение точности тем заметнее, чем хуже по качеству система. Указывается, что полученные формулы могут быть легко распространены на случай обращения матриц.
И. Ф. Шелихова

7 В259. Определение линейной связи двух наблюденных величин по способу наименьших квадратов. Wayman P. A. A least-squares solution for a linear relation between two observed quantities. «Nature» (Engl.), 1959, **184**, № 4679, 77—78 (англ.)

Излагается метод определения линейной связи двух наблюдаемых величин по способу наименьших квадратов Пусть $y=\alpha x+\beta$ — уравнение возможной связи двух «истинных» величин. Точка P_r есть положение наблюденных величин x_r, y_r на плоскости (x, y). Пусть далее в каждой точке P_r описан эллипс с полуосями s_r и t_r, зависящими от точности определения x_r и y_r и касающийся прямой $y=\alpha x+\beta$ в точке Q_r. Уравнение эллипса $\left((x-x_r)^2/s_r^2\right)+\left((y-y_r)^2/t_r\right)=\delta_r^2$. Для точки на прямой, соответствующей с наибольшей вероятностью x_r, y_r, величина $\delta_r^2=w(\alpha x_r-y_r-\beta)^2$, где $w=1/(t_r^2+\alpha^2 s_r^2)$. Этот результат соответствует результату Джеффрейса для максимума логарифмической вероятности

$$\log\left(L_{\max}/L_0\right)\sim\delta_r^2.$$

Наилучшие значения α и β даются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Pi_r L_{\max}\right)=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\Pi_r L_{\max}\right)=0.$$

Переходя к δ_r^2, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sum_r\delta_r^2\right)=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum_r\delta_r^2\right)=0.$$

Значения α и β получаются из уравнений:

$$\beta\sum_r w_r=\sum_r y_r w_r-\alpha\sum_r x_r w_r,\quad \alpha^2\sum_r w_r^2 s_r^2 x_r(y_r-\beta)+$$
$$+\alpha\left\{\sum_r w_r^2 t_r^2 x_r^2-\sum_r w_r^2 s_r^2(y-\beta)^2\right\}-$$
$$-\sum_r w_r^2 t_r^2 x_r(y_r-\beta)=0,$$

решаемых последовательными приближениями. При $t_r=ks_r$ решение соответствует решению Герцшпрунга. Библ. 5 назв. А. С. Шаров

7 В260. О методе минимального приближения. В а л л е П у с с е н Ш. Ж. д е л я. «Тр. Моск. ин-та инж. землеустройства», 1960, вып. 9, 227—236

Перевод из Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1910—1911, 35. В ставшей теперь классической работе Валле Пуссена рассматривается задача чебышевского приближения несовместной системы n линейных уравнений с m неизвестными

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{im}x_m=b_i\ (i=1,\ldots,n)\qquad(1)$$

в предположении, что все миноры m-го порядка матрицы коэффициентов отличны от нуля. Доказывается теорема существования, единственности и характеристическое свойство наилучшего приближения, а также существование некоторой подсистемы из $m+1$ уравнений, чебышевское приближение которой дает искомое приближение всей системы (1). Приводится явное выражение для минимального уклонения в случае $n=m+1$ и при помощи его дается алгорифм для фактического решения задачи.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. Интересную модификацию алгорифма Валле Пуссена дал Е. Штифель (РЖМат, 1960, 5891). С. И. Зуховицкий

7 В261. Численные квадратуры по прямоугольной области двух и более измерений. Часть 2. Квадратуры в пространстве нескольких измерений, использующие специальные точки. M i l l e r J. C. P. Numerical quadrature over a rectangular domain in two or more dimensions. Part 2. Quadrature in several dimensions, using special points. «Math. Comput.», 1960, 14, № 70, 130—138 (англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1960, 13310. При построении приближенного равенства

$$I=\int_{-h}^{h}\ldots\int_{-h}^{h}f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\approx$$
$$\approx(2h)^n\sum A_t f(x_{1t},\ldots,x_{nt})\qquad(1)$$

точки $(x_{1t},\ldots,x_{nt})$ объединяются в такие симметричные группы, чтобы в сумме $\sum f(x_{1t},\ldots,x_{nt})$, после ее разложения по степеням h, отсутствовали бы нечетные степени h, так как эти члены отсутствуют в разложении (1). Автор вводит следующие группы точек: 1) O — начало координат, $\alpha(a)$ — множество точек, получающихся из $(\pm ah, 0,\ldots,0)$ при помощи перестановки осей, $\beta(b)$ — точки, получающиеся из $(\pm bh, \pm bh, 0,\ldots 0)$ перестановкой осей, и т. д. Затем рассматривается равенство

$$I=(2h)^n\left[A_0 f_0+A_\alpha\sum f(x_\alpha)+A_\beta\sum f(x_\beta)+\ldots\right].\qquad(2)$$

При построении его можно распорядиться выбором параметров A_0, A_α, a, A_β, b,.... Их выбирают так, чтобы равенство было точным до членов с некоторой степенью h. Подробно изучаются формулы, точные для членов до h^4. В равенстве (2) справа берутся 3 члена:

$$(2h)^{-n}I\approx A_0+A_\alpha\sum f(x_\alpha)+A_\beta\sum f(x_\beta).\qquad(3)$$

В ней 5 параметров: A_0, A_α, A_β, a, b. Если произвести в (3) сравнение коэффициентов при разных группах членов, получится система четырех уравнений для нахождения пяти параметров. Один параметр остается произвольным, и при помощи специального выбора его автор строит несколько частных формул. Для двумерного квадрата им построены четыре формулы. Построено также несколько формул для трехмерного куба. Во всех случаях указаны главные члены остатков. Приведено большое число примеров вычислений. В. И. Крылов

7 В262. Численные квадратуры по прямоугольной области двух и более измерений. Часть 3. Интегрирование гармонических функций. M i l l e r J. C. P. Numerical quadrature over a rectangular domain in two or more dimensions. Part 3. Quadrature of a harmonic integrand. «Math. Comput.», 1960, 14, № 71, 240—248 (англ.)

Обозначения такие же, как во второй части работы (реф. 7В261). Интегрируемая функция считается гармонической в кубе $(-h\leqslant x_s\leqslant h)$ $(s=1,2,\ldots n)$, что упрощает задачу построения приближенного представления интеграла и позволяет получить лучшую точность по сравнению с формулами во второй части при том же числе членов. Автор ограничивается следующим приближенным представлением интеграла

$$I=\int_{-h}^{h}\ldots\int_{-h}^{h}f\,dx_1\ldots dx_n\approx$$
$$\approx(2h)^n\left[A_0+A_\alpha\sum f(x_\alpha)+A_\beta\sum f(x_\beta)\right].\qquad(1)$$

Часть параметров A_0, A_α, A_β, a, b он задает заранее тем или иным способом, остальные же выбирает так, чтобы достигнуть достаточно высокого порядка точности равенства (1). Для двумерного квадрата берутся группы точек 0, $\alpha(1)$, $\beta(1)$ и получаются расчетные схемы не более чем с девятью точками. Приведены еще пять расчетных формул с более простыми коэффициентами и с остатками порядка h^8.

В пространстве любого числа n измерений автор пользуется теми же группами точек 0, $\alpha(1)$, $\beta(1)$ и в равенстве (1) выбирает только параметры A_0, A_α, A_β. Приведена таблица значений параметров для $n=3, 4, 5, 6$. В плоскости рассматривается также задача специального подбора параметров $a, b,\ldots$. Берется несколько групп точек b_p $(p=0(1)r)$ и строятся формулы двух видов

$$\frac{1}{8}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}f\,dx\,dy=I=\sum_1^n A_p f(b_p h, b_p h)$$

и $J=A_0 f_0+\sum A_\beta f(b_p h, b_p h)$.

Параметры их A_0, A_β, b_p выбираются так, чтобы равенство имело возможно высокую степень точности относительно h. Указывается на связь этой задачи с теорией ортогональных многочленов. Приведены примеры вычислений. В. И. Крылов

7 В263. Формулы для численного интегрирования по кругу. Albrecht J. Formein zur numerischen Integration über Kreisbereiche. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 10-11, 514—517 (нем.)

Выведено несколько кубатурных формул типа квадратурных формул Гаусса для круговых областей.

7 В264. Обобщение некоторых интерполяционных формул функций нескольких переменных и некоторые соображения относительно формулы численного интегрирования Гаусса. Stancu D. D. Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcţiile de mai multe variabile şi unele consideraţii asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss. «Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz.», 1957, **9**, № 2, 287—313 (рум.; рез. русск., франц.)

В первой части рассматривается обобщение интерполяционной формулы Лагранжа для функций нескольких переменных. Во второй части выводится кубатурная формула типа Гаусса

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ik} f(x_i, y_k) + \rho, \qquad (1)$$

степень точности которой равна $(2n-1,\ 2m-1)$. Здесь

$$A_{ik} = 4/(1-x_i^2)(1-y_k^2)[P_n'(x_i)\,P_m'(y_k)]^2,$$

P_k — полиномы Лежандра. Получено эффективное выражение для остатка ρ формулы (1). Результаты обобщаются на случай трех переменных. В. К. Саульев

7 В265. О вычислении функции $j_0(z, \theta)$ для больших значений «z». Fettis Henry E. On the calculation of the function $j_0(z, \theta)$ for large values of z. «J. Math. and Phys.», 1957, **36**, № 3, 279—283 (англ.)

Предлагается два метода для вычисления функции

$$j_0(z, \theta) = \int_0^\theta e^{iz\cos\varphi}d\varphi \qquad (1)$$

при больших значениях z (для малых или не слишком больших значений z приближенные представления функции (1) известны). Первый метод заключается в асимптотическом представлении

$$j_0(z, \theta) \sim \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(z) - e^{iz\cos\theta}\sum_{k=0}^{\infty} V_k(\cos\theta)\left(-\frac{i}{z}\right)^{1+k}, \qquad (2)$$

где

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN(z), \quad V_n = \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{-1/2}]$$

(приведены явные выражения для $F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, 8$, где

$$V_n(x) = (1-x^2)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} F_n(x)).$$

Как отмечает автор, ряд (2) дает хорошие результаты при больших значениях z и не близких к нулю значениях θ. Другой метод заключается в интегральном представлении

$$j_0(z, \theta) = \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(z) + ie^{iz\cos\theta}\int_0^\infty \frac{e^{-zv}\,dv}{\sqrt{v^2 - 2iv\cos\theta + \sin^2\theta}}, \qquad (3)$$

где подынтегральная функция не осциллирует. Метод (3) по сравнению с методом (2) более трудоемок, но зато позволяет получить функцию $j_0(z, \theta)$ с любой точностью для всех значений θ. Библ. 10 назв. В. К. Саульев

7 В266. Интерполяционные полиномы для функций нескольких переменных. Филин А. П. «Прикл. матем. и механ.», 1957, **21**, № 5, 678—688

Предлагаются две формы изображения интерполяционных полиномов для функций нескольких переменных, позволяющие обеспечить вычисления раз навсегда найденными коэффициентами, сведенными в таблицы. Имеется в виду, что по каждой из переменных отрезок интерполяции разбит на равные участки. Для отыскания отмеченных выше коэффициентов приходится пользоваться коэффициентами, вычисленными применительно к интерполяционному полиному для функции одной переменной. В связи с этим первый параграф статьи посвящен интерполяционным полиномам для функций одной переменной. Резюме автора

7 В267. Интерполирование с разделенными разностями. Саникидзе Д. Г. «Сообщ. АН ГрузССР», 1960, **25**, № 1, 3—10

Выводятся формулы (весьма общего вида) для вычисления разделенной разности с повторяющимися значениями аргумента. Полученные формулы применяются для конструирования интерполяционных формул с кратными узлами. Строятся квадратурные формулы замкнутого типа с производными интегрируемой функции и с абсциссами, лежащими вне промежутка интегрирования. Некоторые из них применяются для численного интегрирования дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. И. Ф. Шелихова

7 В268. Замечание о многомерной интерполяции для неравноотстоящих значений аргумента с применением к двойному суммированию. Salzer Herbert E. Note on multivariate interpolation for unequally spaced arguments, with an application to double summation. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1957, **5**, № 4, 254—262 (англ.)

В другой работе автора (J. Math. and Phys., 1948, **26**, 294—305) исследована многомерная интерполяционная формула Грегори — Ньютона (выраженная через смешанные разности до n-го порядка) для случая равноотстоящих значений аргумента. В этой работе автор обобщает свои результаты на случай неравноотстоящих значений аргумента.

7 В269. Об одной интерполяционной формуле. Radu N. C. Asupra unei formule de interpolare. «Comun. Acad. RPR», 1957, **7**, № 8, 693—696 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор исходит из интерполяционной формулы О. Онического и получает более общую интерполяционную формулу. Указывается несколько свойств этой формулы. Резюме автора

7 В270. Рациональные аппроксимации трансцендентных функций. Maehly H. J. Rational approximations for transcendental functions. Informat. processing. Paris — München — London, 1960, 57—62 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Рассматривается равномерное приближение функций полиномами и непрерывными дробями. Для конкретных примеров функций e^x, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{arctg}x$ приводятся графики зависимостей числа верных десятичных цифр от числа членов степенного ряда или непрерывной дроби. Описываются методы вычисления коэффициентов чебышевской аппроксимации. А. А. Красилов

7 В271. Некоторые способы эффективного применения принципа линеаризации к построению решений важного класса задач нелинейного чебышевского приближения. Ремез Є. Я. Деякі способи ефективного застосування принципу лінеаризації до побудови розв'язків певного важливого класу задач нелінійного чебишовського наближення. «Доповіді АН УРСР», 1960, № 3, 272—278 (укр.; рез. русск., англ.)

Работа является продолжением предыдущей работы автора (РЖМат, 1961, 1В280). Рассматриваются специальные случаи чебышевских задач, сводящиеся к последовательному решению аналогичных задач на некоторых подмножествах компакта, состоящих из $n+1$ точек. Пусть для задачи отыскания $\min_{z}\max_{x\in[a,b]}|\varphi(x;z)|$ $(z=(z_1,\ldots,z_n))$ найдено исходное приближение $z=z^*$, для которого

$$\operatorname{sign}\varphi(x_\nu;z^*)=(-1)^\nu\operatorname{sign}\varphi(x_0;z^*)\quad(\nu=0,\ldots,n).$$

Тогда строят приближенно чебышевское решение $z^{(1)}$ несовместной системы нелинейных уравнений

$$\operatorname{sign}\varphi(x_\nu;z^*)\,\varphi(x_\nu;z)=0$$
$$(\nu=0,\ldots,n),$$

находят экстремальные точки $x_\nu^{(1)}$ $(\nu=0,\ldots,n)$ функции $\varphi(x;z^{(1)})$ и с новым набором $x_0^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}$ повторяют предыдущий шаг итеративного процесса. Приводятся примеры. С. И. Зуховицкий

7 В272. Вычислительная разработка нескольких подходов к приближенному построению решений чебышевских задач с нелинейно входящими параметрами. I. Ремез Е. Я., Гаврилюк В. Т. «Укр. матем. ж.», 1960, 12, № 3, 324—338 (рез. англ.)

Приводится изложение результатов двух заметок первого автора (Доповіді АН УРСР, 1959, № 2, № 4) и подробно разбираются примеры, выполненные «при ответственном руководящем участии» второго автора в вычислительной лаборатории Института математики АН УССР. С. И. Зуховицкий

7 В273. Численный метод аналитического продолжения. Douglas Jim, Jr. A numerical method for analytic continuation. «Boundary Problems Different. Equat. Madison, Univ. Wisconsin Press», 1960, 179—189 (англ.)

Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в круге $0\leqslant|z|\leqslant1$, и пусть $\max_{|z|\leqslant1}|f(z)|\leqslant m_0$, $\max_{|z|\leqslant1}|f'(z)|\leqslant m_1$, $\max_{|z|\leqslant1}|f''(z)|\leqslant m_2$. Предполагается, что в точках $s_j=\rho\exp\frac{2\pi ij}{p}$, $j=0,1,\ldots,p-1$, известны приближенные значения $g_\varepsilon(s_j)$, т. е. $|g_\varepsilon(s_j)-f(s_j)|\leqslant\varepsilon$, $j=0,1,\ldots,p-1$. Задача заключается в приближении $f(z)$ в $|z|<1$. При ее решении автор применяет метод, подобный тому, который был им применен в случае гармонического продолжения. Пусть

$$F(z,\{a_k\})=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k\Delta t_k}{t_k-z},$$

где

$$|a_k|\leqslant m_0,\ k=0,\ldots,n-1\ \text{и}\ t_k=\exp\frac{2\pi ik}{n},$$
$$k=0,\ldots,n-1,\ \Delta t_k=t_{k+1/2}-t_{k-1/2}.$$

Тогда $F(z,\{a_k\})$ является аналогом римановой суммы для интеграла Коши. Пусть $e(\{a_k\})=\max_j|g_\varepsilon(s_j)-F(s_j,\{a_k\})|$. Тогда существуют $\{a_k^*\}$ такие, что

$$e(\{a_k^*\})=\inf e(\{a_k\}).$$

Пусть, далее, $F(z,n,p,\varepsilon)=F(z,\{a_k^*\})$. Тогда $F(z,n,p,\varepsilon)$ — приближенное аналитическое продолжение $f(z)$ в $|z|<1$. Получены априорная и апостериорная оценки погрешности для $\max_{|z|=R}|f(z)-F(z,n,p,\varepsilon)|$. Вывод базируется на шести леммах

Лемма 1. Если $F^{(j)}(z,\{a_k\})$ обозначает j-ю производную от $F(z,\{a_k\})$, то $\max_{|z|\leqslant\rho}|F^j(z,\{a_k\})|\leqslant\frac{m_0j!}{(1-\rho)^{j+1}}$.

Лемма 2. Пусть

$$G(\rho,R)=\sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R}\frac{a(t)\,dt}{t-z}\right|:a(t)|\leqslant m_0,|z|\leqslant\rho<R\right\}.$$

Тогда

$$G(\rho,R)=\frac{Rm_0}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{m_0}{\pi\sqrt{1-\frac{\pi^2}{48}}}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\times$$
$$\times\log\left(\frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(1-\frac{\pi^2}{48}\right)R\rho}+\sqrt{(R-\rho)^2+\frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{\pi^2}{48}\right)R\rho}}{R-\rho}\right)+$$
$$+\frac{m_0R}{2\sqrt{R^2+\rho^2}}.$$

Лемма 3. Пусть

$$H(\rho)=\sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k\Delta t_k}{t_k-z}\right|:|a_k|\leqslant m_0,|z|\leqslant\rho<1\right\}=$$
$$=\sup\{|F(z,\{a_k\})|:|z|\leqslant\rho<1\}.$$

Тогда

$$H(\rho)\leqslant\frac{2m_0}{(1-\rho)n}+G(\rho,1).$$

Лемма 4. Пусть $u(z)$ — аналитическая функция в $|z|\leqslant\rho$, $|u''(z)|\leqslant k$ для $|z|\leqslant\rho$ и

$$s_j=\rho\exp\frac{2\pi ij}{p}\ (j=0,1,\ldots,p-1).$$

Если $|u(s_j)|\leqslant\delta$ для $j=0,1,\ldots,p-1$, тогда

$$\max_{|z|=\rho}|u(z)|\leqslant\delta\sec\frac{\pi}{2p}+4k\rho^2\sin^2\frac{\pi}{2p}\left(1+2\rho\sin\frac{\pi}{2p}\right).$$

Лемма 5. Пусть $h(z)$ аналитична в $|z|\leqslant R$, $|h'(z)|\leqslant b_1$, $|h''(z)|\leqslant b_2$ — в $|z|\leqslant R$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}h(z)\,dz-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{p-1}h(s_j)\Delta s_j\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\pi^2}{2p^2}(R^2b_1+R^3b_2),$$

где $s_j=R\exp\frac{2\pi ij}{p}$, $\Delta s_j=s_{j+\frac12}-s_{j-\frac12}$.

Лемма 6. Если в $|z|\leqslant1$ $f(z)$ аналитична,

$$|f(z)|\leqslant m_0,\ |f'(z)|\leqslant m_1,\ |f''(z)|\leqslant m_2,$$

то

$$\left|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(t_k)\Delta t_k}{t_k-z}\right|\leqslant\frac{\pi^2}{2n^2}(b_1+b_2),\ |z|\leqslant\rho<1,$$

где

$$b_1 = \frac{m_1}{1-\rho} + \frac{m_0}{(1-\rho)^2},$$

$$b_2 = \frac{m_2}{\cos\frac{\pi}{n} - \rho} + \frac{2m_1}{\left(\cos\frac{\pi}{n} - \rho\right)^2} + \frac{2m_0}{\left(\cos\frac{\pi}{n} - \rho\right)^3}.$$

Основная теорема формулируется так: Для $0 < \delta < 1-\rho$

$$\max_{|z|=R} |f(z) - F(z, n, p, \varepsilon)| \leqslant$$

$$\leqslant b(R, \delta, n)\left[\left(\frac{A}{n^2} + 2\varepsilon\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sec\frac{\pi}{2p} + \frac{\pi^2\rho^2}{p^2}\left(m_2 + \frac{2m_1}{(1-\rho)^3}\right)\left(1 + \frac{\pi\rho}{p}\right)\right]^{a(R,\delta)},$$

где

$$A = \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{m_1 + m_2}{\cos\frac{\pi}{n} - \rho} + \frac{m_0 + 2m_1}{\left(\cos\frac{\pi}{n} - \rho\right)^2} + \frac{2m_0}{\left(\cos\frac{\pi}{n} - \rho\right)^3}\right],$$

$$a(R, \delta) = \frac{\log\frac{1-\delta}{R}}{\log\frac{1-\delta}{\rho}},$$

$$b(R, \delta, n) = M_\delta^{\frac{\log\frac{R}{\rho}}{\log\frac{1-\delta}{\rho}}},$$

$$M_\delta = \max_{|z| \leqslant 1-\delta} |f(z) - F(z, n, p, \varepsilon)|.$$

Д. Б. Тополянский

7 В274. Новые программы вычисления конечных разностей на счетно-перфорационных машинах. Раппопорт М. Г. «Вычисл. математика», сб. 3, 1958, 186—189

На примере вычисления разностей 6-го порядка рассматривается способ построения программ вычисления разностей на табуляторе Т-5, которые в отличие от программ, рассмотренных ранее (РЖМат, 1960, 9627), требуют для своей реализации меньше аппаратуры, более простой настройки машины и в большинстве случаев меньшего числа промежуточных ходов.

Из введения к статье

7 В275. Исследование линейных совместных уравнений методом Монте-Карло. Wagner Harvey M. A Monte Carlo study of estimates of simultaneous linear structural equations. «Econometrica», 1958, **26**, № 1, 117—133 (англ.)

7 В276. Некоторые оценки для непрерывного метода Монте-Карло, основанные на использовании броуновского движения. Motoo Minoru. Some evaluations for continuous Monte Carlo method by using Brownian hitting process. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 1, 49—54 (англ.)

Следуя идеям Мюллера (РЖМат, 1958, 2425), автор дает оценки средней квадратической ошибки и среднего числа шагов, необходимых при решении задачи Дирихле методом Монте-Карло. Рассматривается ограниченная область D в m-мерном евклидовом пространстве R^m с достаточно гладкой границей B. Строится сферический процесс $S(x) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ следующим образом: 1) $x_0 = x \in D$ выбирается произвольно. 2) Если последовательность случайных величин $x_0, x_1, \ldots, x_n$ определена, то x_{n+1} есть случайная величина равномерно, распределенная на $k(x_n)$, где $k(x)$ — сфера максимального радиуса $\rho(x_n)$, содержащаяся внутри области $D \cup B$ с центром в точке x_n. Пусть $N = \inf\{n : \rho(x_n) \leqslant \delta\}$; процесс $S(x, \delta)$ называется δ-обрезанным, когда $S(x)$ останавливается после N шагов. Приближенное решение $U(x)$ задачи Дирихле в области $D : \Delta u = 0$ в D, $u = f$ на B (f — ограниченная непрерывная на B функция) получается следующим образом: 1) строится процесс $S(x, \delta)$, 2) $U(x)$ есть $f(\bar{x}_N)$, где $\bar{x}_N$ — любые точки из $k(x_n) \cap B$. Доказывается, что если $|U(x) - U(y)| \leqslant C \|x - y\|$ для всех $x, y \in \overline{D}$, $\|x - y\|$ — евклидово расстояние между x и y и $U_1(x), \ldots, U_n(x)$ — n независимых приближений $U(x)$, то

$$\sigma_n^2(x) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k(x) - u(x)\right)^2 \leqslant c\delta^2 + \frac{1}{n}(4Fc\delta + c^2L^2),$$

где

$$F = \sup_{x \in B} |f(x)| = \sup_{x \in D} |u(x)|,$$

$$L = \sup_{x, y \in D} \|x - y\|.$$

Автор получает оценку для среднего числа шагов:

$$M_x(N) < \left(1 + \log\frac{\rho(x)}{\delta}\right) 16m, \quad \rho(x) < \delta.$$

В. А. Маковский

7 В277. О практическом вычислении бесконечных тригонометрических рядов. Мишонов Михаил. Върху практическото изчисление на безкрайните тригонометрични редове. «Изв. Техн. ин-т. Бълг. АН», 1960, кн. 9—10, 63—68 (болг.; рез. русск., нем.)

Обращается внимание на то, что в бесконечных тригонометрических рядах величина порядка отдельных членов не может служить правильным критерием практической ценности рядов. В отдельных случаях возможно достичь весьма существенных упрощений при вычислении тригонометрических рядов, имеющих малую практическую ценность, посредством разложения данного ряда в ряд, который может практически точно суммироваться и в ряд, члены которого весьма малы.

Из резюме автора

7 В278. Замечание о методе вычисления гамма-функции. Gordon N. L., Flasterstein A. H. A note on a method of computing the gamma function. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, **7**, № 4, 387—388 (англ.)

Рассматривается формула вида

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} \times$$

$$\times \frac{\exp\left(x + k - \frac{1}{2}\right)\ln(x+k) - (x+k)\exp\sum_{r=1}^{N} \frac{C_r}{(x+k)^{2r-1}}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)},$$

где $C_r = (-1)^{r-1}B_r/(2r-1)2r$, B_r — числа Бернулли. Приведены графики для границ погрешностей $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-9}$ и $\varepsilon < 5 \cdot 10^{-17}$, как функций N и x.

7 В279. Задача Буссинеска. Метод приближенного расчета. Granholm Hjalmar. Le problème de Boussinesq. Une méthode de calcul approximative. «Chalmers tekn. högskol. handl.», 1960, № 229, 15 p. (франц.)

Приближенно выводятся формулы распределения напряжений и определяются деформации в полубесконечном упругом теле под действием концентрированной вертикальной нагрузки. Предполагается, что нагрузка распределяется в тонких конических пластинках с общей вершиной в точке приложения силы, причем в случае постоянства модуля упругости отсутствуют скалывающие напряжения между отдельными слоями. Выведенные формулы для вертикальных составляющих напряжения сжатия σ_z и напряжения сдвига τ совпадают с формулами Буссинеска. Для горизонтальной составляющей напряжения сжатия σ_u получена формула, отличающаяся отсутствием слагаемого, содержащего коэффициент Пуассона ν. Однако автор замечает, что в случае $\nu = 0{,}5$, обычно имеющего место для строительных

грунтов, это слагаемое оказывается равным нулю и, следовательно, предложенная формула совпадает с общепринятой. Рассмотрены также случаи упругого тела конечной толщины, лежащего на жестком основании, и упругого тела, состоящего из двух слоев с разными модулями упругости. А. Б. Штыкан

7 В280. Некоторые численные методы отыскания периодических движений систем автоматического регулирования. Неймарк Ю. И. «Автоматика и телемеханика», 1961, **22**, № 1, 47—56 (рез. англ.)

Предлагаются некоторые численные методы отыскания периодических движений систем автоматического регулирования. Для их применения достаточно располагать частотными характеристиками линейных звеньев и графиками характеристик нелинейных звеньев.

Резюме автора

7 В281. Вычисление функций Бесселя на быстродействующих вычислительных машинах. Stegun Irene A., Abramowitz Milton. Generation of Bessel functions on high speed computers. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1957, **11**, № 60, 255—257 (англ.)

7 В282. Применение современной вычислительной техники в аналитических методах небесной механики. Гонтковская В. Т. «Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, **6**, № 9, 592—629 (рез. англ.)

Выясняется возможность использования счетно-аналитических и электронных цифровых машин в аналитических методах небесной механики. Рассматриваются четыре различных метода. Дается оценка каждого из них с точки зрения применения тех и других машин.

Резюме автора

7 В283. Подсчет объемов земляных работ методом приведенной плоскости. Галясовский И. В. «Сб. научн. тр. Днепропетр. инж.-строит. ин-т», 1960, вып. 5, 22—54

Рассматриваются два способа подсчета объемов земляных работ при проектировании методом приведенной плоскости: способ начертательной геометрии, т. е. способ топологического отображения объема топографического тела на плоскость, и способ приведения ограничивающей топографической поверхности к плоскости при задании последней горизонталями. Приведенный пример показывает, что способ топологического отображения требует меньшего количества операций, чем, например, способ треугольных призм, и может применяться для многих объемных тел, закон образования которых неизвестен. Исследованы допустимая относительная ошибка. Излагается графический способ определения выпуклости и вогнутости топографической поверхности при помощи определяющего треугольника с целью выявления их влияния на объемы и на точность подсчета объемов по высоте сооружения. И. Ф. Шелихова

7 В284. Предвычисление ошибок и размеров поправочных членов в формулах подсчета объемов земляных масс. Маслов М. И. «Тр. Ташкентск. ин-та инж. ирриг. и механиз. с. х.», 1960, вып. 14, 93—107

Выводятся формулы средней квадратической ошибки объема тела, вычисленного по формуле Симпсона, если известны площади оснований, расстояние между ними и ошибки измерений. Получены значения поправочных членов и средней квадратической ошибки объема для формул Винклера и Яцыны, а также для известной формулы

$$V = Sl + \frac{n(h_1 - h_2)^2}{12} l,$$

и для предложенной автором формулы вида

$$V = \left[a(h_1 + h_2) + \frac{n}{3}(h_1 + h_2)^2 - \frac{n}{3} h_1 h_2 \right] l.$$

Анализ приведенных экспериментальных данных показывает, что поправочные члены по своей величине не превышают 1% объема и что они тем больше, чем больше расстояние между поперечными сечениями. Найдено выражение для вычисления относительной ошибки в процентах. Получены формулы, пользуясь которыми можно предвычислять средние квадратические ошибки полевых измерений расстояний и рабочих отметок для заранее заданной относительной ошибки объема. Изложенное проиллюстрировано примером. И. Ф. Шелихова

7 В285. О вычислении вертикального градиента двумерных магнитных полей. Страхов В. Н. «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1960, № 7, 979—987

Описывается методика приближенного вычисления вертикального $\partial Z/\partial y$ и горизонтального $\partial Z/\partial x$ градиентов двумерных магнитных полей по заданному конформному и однозначному преобразованию

$$W_1(z) = H(x, y) - iZ(x, y) = 2\int_S \frac{m(\xi, \eta)\, e^{i\nu(\xi,\eta)}}{(z - \zeta)^2}\, dS$$

верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ плоскости z на некоторую область G плоскости $W_1(H, -Z)$, причем действительная ось координатной системы xoy отображается на замкнутую почти везде гладкую кривую Γ_x, которая и ограничивает область G. Дается обоснование вычисления координат точек кривой Γ'_x, являющейся границей области G', конформно и однозначно отображающей верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ на плоскость $W'_1(\partial z/\partial y, \partial z/\partial x)$ с помощью преобразования

$$W'_1(z) = -\frac{\partial Z}{\partial y} - i\frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Указанные вычисления сводятся к определению mod и arg точек x'_k кривой Γ'_x, для которых выведены удобные соотношения $\mathrm{mod}\, x'_k = \Delta l_k/\Delta x$ и $\arg x'_k = \psi'_k = \psi_k - \pi$, где Δl_k — длина дуги кривой Γ_x, ограниченной точками, соответствующими точкам x_k и $x_k + \Delta x$ действительной оси; ψ_k — угол, составленный касательной к кривой Γ_x в середине дуги Δl_k с действительной осью. Определение Δl_k и ψ_k производится с помощью миллиметровой линейки и транспортира. Приводится оценка точности, в соответствии с которой относительная погрешность определения $\partial Z/\partial y$ предлагаемым способом не превышает 7%, что удовлетворяет некоторые потребности практики. Приведены примеры приложения описываемого метода к обработке теоретических и экспериментальных кривых магнитосъемки. В. Е. Войцеховский

7 В286. Номограммы, ткани и квазигруппы. Aczél J., Pickert G., Radó F. Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen. «Mathematica» (RPR), 1960, **2**, № 1, 5—24 (нем.)

Ткани, состоящей из трех однопараметрических семейств линий, ставится в соответствие квазигруппа, элементами которой являются эти линии. Посредством использования групповых свойств доказываются некоторые теоремы из теории регулярных тканей. В частности, доказывается необходимость и достаточность для регулярности ткани выполнения одного из условий: Томсена (Thomsen), Райдемайстера (Reidemeister) или шестиугольности. Если теорема Райдемайстера выполняется для определенной пары x_1, y_1 и всех значений $x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4$, то она выполняется при любых x_1, y_1. Если теорема Томсена выполняется при определенном значении y_1 и всех значениях x_1, x_2, x_3, y_2, y_3, то она выполняется при всех y_1. Кроме того, рассматриваются некоторые свойства квазигрупп. Г. Е. Джемс-Леви

7 В287. Замечания к статье И. Алмар и Б. Балаж: «Приближенный метод расчета траектории космической ракеты, проходящей вблизи Луны». Békéssy András, Tóth Károly. Remark on the paper of Almár & Balázs. «Approximate method of plotting the orbit of a space rocket passing near the Moon», «Magyar

tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1959, **4**, № 2, 143—147 (англ.; рез. венг., русск.)

Приведены номограммы из выравненных точек для формул из работы (РЖМат, 1960, 14470), представленных там сетчатыми номограммами. Даны уравнения элементов номограмм. Г. С. Хованский

7 В288. Локально инвариантные свойства приближенных номограмм. Сморкачев Е. Т. «Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т», 1958, **18**, 21—48

Инвариантные свойства приближенных номограмм описываются с помощью так называемых номографических инвариантов, введенных С. В. Смирновым (РЖМат, 1956, 9144) и, независимо, автором (РЖМат, 1960, 9646).

7 В289. Номографирование уравнений третьего номографического порядка. Немцова Л. Г. «Вычисл. математика», сб. 6, 1960, 100—113

Устанавливается геометрический смысл параметров проективного и непроективного преобразований и дается новый метод номографирования уравнений третьего номографического порядка, позволяющий использовать введенные параметры для улучшения номограмм. Уравнение ответной шкалы рассматривается в общей форме, содержащей все параметры. Для определения параметров пользуются сетчатой номограммой (абаком Декарта), построенной для трех рассматриваемых случаев решения систем уравнений. При выбранных значениях пометок получается некоторое вполне определенное значение параметра, знак которого определяет одну из трех возможных шкал. Отличие и преимущество рассматриваемого метода по сравнению с методом скелетов состоит в том, что отпадает необходимость выбора уравнений шкал, так как он получается автоматически. Описывается примерная схема построения номограммы изложенным методом. Доказывается, что построенная по засечкам номограмма соответствует данному уравнению. Приводится числовой пример. И. Ф. Шелихова

7 В290. Справочник по автоматическим вычислениям.—. Handbook for automatic computation. «Comput. J.», 1960, **2**, № 4, 169 (англ.)

Сообщение о подготовке к печати в издательстве Springer — Verlag справочника с пояснениями на английском языке по автоматическим вычислениям, который выйдет в пяти или более томах в серии Schmidt F. K., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. В справочнике будут собраны проверенные алгоритмы математических вычислений: тома 1А и 1В — вводные по программированию; том 2 — решение конечных уравнений, линейных и нелинейных, включая определение характеристических чисел и векторов матриц; том 3 — функциональные уравнения, в частности, дифференциальные уравнения, простые и в частных производных, и интегральные уравнения; том 4 посвящается методам аппроксимации; том 5 — вычислению специальных функций. Зарезервирован том 6, включающий алгоритмы математического программирования решения неравенства, статистических вычислений и т. п. До выхода в свет справочника указанные алгоритмы будут опубликованы в серии дополнений к журналу. Г. П. Зеленкевич

7 В291 К. Справочник по математическим таблицам. Lebedev A. V., Fedorova R. M. A guide to mathematical tables. «Transl. from the Russ. Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, xlvi, 586 pp., £ 5, 5 sh. (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1957, 7428К).

7 В292 К. Разностные методы решения краевых задач. Рихтмайер Р. Д. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1960, 262 стр., илл., 10 р. 80 к.

В первой части монографии (5 глав) в свете теории линейных операторов излагаются общие соображения относительно решения краевых задач разностными методами, во второй (5 глав) — приложение разностных методов к решению некоторых задач математической физики на цифровых вычислительных машинах. В гл. I «Введение» на примере уравнения теплопроводности автор обсуждает вопросы построения системы конечно-разностных уравнений, ограниченности решения последних при $t\to\infty$ и фиксированных Δt и Δx, поведения погрешности в данной точке (x, t), когда ячейка сетки безгранично измельчается. Даны необходимое и достаточное условия устойчивости для явного и неявного разностных уравнений. Гл. II «Линейные операторы» имеет вспомогательный характер и посвящена некоторым сведениям из теории линейных операторов. В гл. III «Линейные разностные уравнения» излагается теория Лакса аппроксимации линейных краевых задач посредством конечноразностных уравнений. В частности, формулируется следующая теорема Лакса об эквивалентности: если выполнены условия согласованности для корректно поставленной краевой задачи, то устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости решения разностных уравнений к точному решению краевой задачи при произвольных граничных условиях.

Результаты теории Лакса конкретизируются в гл. IV «Линейные задачи с постоянными коэффициентами» на краевые задачи с постоянными коэффициентами и простыми граничными условиями. Для корректно поставленных краевых задач с постоянными коэффициентами условие согласованности сводится к требованию, чтобы погрешность аппроксимации в пределе при $\Delta t\to 0$ обращалась в нуль, а условие устойчивости требует, чтобы для некоторого положительного τ матрица перехода $G(\Delta t, \mathbf{k})^n$ в пространстве коэффициентов Фурье при $0<t<\tau$, $0\leqslant n\Delta t\leqslant T$ и всех $\mathbf{k}\in L$ (L — сетка в пространстве векторов $\mathbf{k}$) была равномерно ограниченной. Для этих задач подробно исследуются необходимые, а также необходимые и достаточные условия устойчивости. В гл. V «Многослойные разностные уравнения» построены многослойные разностные уравнения для краевой задачи $du/dt=Au$, $u=u(t)$, определены устойчивость их через равномерную ограниченность некоторых операторов, условие согласованности и сформулирована теорема эквивалентности Лакса. Для линейных задач с постоянными коэффициентами условие согласованности удовлетворяется, если погрешность аппроксимации стремится к нулю при $\Delta t\to 0$ и если разностное уравнение устойчиво. В заключение исследуется согласованность устойчивого трехслойного разностного уравнения, предложенного Дюфортом и Франкелом, с уравнением диффузии. В гл. VI «Диффузия и теплопроводность» для одномерного уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности приведены различные конечноразностные уравнения, погрешности аппроксимации и условия устойчивости. Многие из этих разностных схем обобщены на случай переменных коэффициентов. Для задач диффузии устойчивость практически не зависит от членов низшего порядка. Изложен метод прогонки решения разностного уравнения 2-го порядка. На примере уравнения $u_t=(u^\sigma)_{xx}$ показано, что для нелинейных задач устойчивость зависит не только от структуры конечноразностной системы, но и от получаемого решения; при некоторых значениях t система может быть устойчивой для одного из решений и не быть таковой для других. Кратко изложены результаты Йона по исследованию смешанной задачи для квазилинейного уравнения

$$u_t = a_0(x,t)\,u_{xx} + a_1(x,t)\,u_x + d(x,t,u);\ a_0(x,t)\geqslant a_{00}>0$$

с ограниченными и равномерно непрерывными по всем аргументам функциями a_0, a_{0x}, a_{0xx}, a_1, a_{1x}, d, причем $d(x, t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u. Рассмотрены некоторые конечноразностные схемы и условия их устойчивости для параболического уравнения с двумя пространственными переменными. В гл. VII «Уравнение переноса» на примере нестационарного одногруппового уравнения со сферической симметрией или

симметрией слоя рассмотрено четыре метода численного решения в изотропном и однородном веществе — сферических гармоник, Вика — Чандрасекхара, S_n — метод Карлсона и прямого интегрирования. Для уравнения в сферических гармониках описаны две явные разностные схемы численного решения, погрешность аппроксимации и условия устойчивости. Показано, что для слоя с изотропным рассеянием уравнения в сферических гармониках и уравнения Вика — Чандрасекхара эквивалентны. Для уравнений Вика — Чандрасекхара приведено пять схем численного решения, погрешность аппроксимации и условия устойчивости. Обсуждается устойчивость разностных уравнений, применяемых при численном решении S_n-методом Карлсона и методом прямого интегрирования. Последний метод применен для решения нестационарной задачи со сферической симметрией, когда интегрирование производится вдоль траекторий нейтронов в пространстве координат — времени по аналогии с методом характеристик в гидродинамических задачах. Гл. VIII «Звуковые волны» содержит явные и неявные конечноразностные уравнения и условия их устойчивости для одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами при наличии неоднородных начальных условий и условий периодичности вместо граничных условий. Кроме того, исследуются конечноразностные уравнения для системы из параболического и гиперболического уравнений, появляющихся при акустических колебаниях, когда перенос энергии посредством теплопроводности может оказывать значительное влияние на движение. Гл. IX «Упругие колебания» посвящена построению разностных уравнений, исследованию условий устойчивости их для уравнения поперечного колебания тонкого стержня при различных граничных условиях, а также для уравнения колебания продольно-напряженного стержня. В гл. X «Одномерное движение жидкости (газа)» изложены конечноразностные методы расчета нестационарных течений, описываемых уравнениями движения в форме Эйлера и Лагранжа. Для уравнений Эйлера в случае симметрии слоя для гладкой части течения приведены разностные уравнения Лелевье и рассмотрена их устойчивость посредством изучения уравнений в вариациях для разностных уравнений. Указаны условия, при которых все собственные значения матрицы перехода $G(0, k)$ лежат внутри единичного круга или на его границе. Для уравнений Лагранжа также построены устойчивые конечноразностные уравнения. При наличии поверхности раздела двух сред с целью повышения точности дается модифицированная конечноразностная система уравнений. Излагаются конечноразностные схемы, автоматически учитывающие скачок посредством использования явления диссипации. Явления диссипации сглаживающе действуют на скачки, заменяя поверхность разрыва тонким переходным слоем, в котором величины меняются быстро, но без разрыва. В качестве диссипации Нейман и Рихтмайер используют квадратичный, а Лакс — линейный член, соответствующий вязкости. Введение псевдовязкости не изменяет устойчивости обычных разностных уравнений для гладкого потока жидкости. Метод псевдовязкости иллюстрирован численным примером. Имеется именной и предметный указатели; библ. 79 назв. Н. Я. Лященко

ТАБЛИЦЫ

7 В293. Таблицы n, $\ln n$, $n \ln n$ и $n(\ln n)^2$ для $n=1$ (1) 500 с применениями. Masuyama Motosaburo Tables of n, $\log n$, $-n \log n$ and $n(\log n)^2$ for $n=1$ through 500 with applications. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1960, **7**, № 2, 52—64 (англ.)

7 В294. Таблица границ интеграла вероятностей для случая, когда известны первые четыре момента. Simpson J. A., Welch B. L. Table of the bounds of the probability integral when the first four moments are given. «Biometrika», 1960, **47**, № 3-4, 399—410 (англ.)

Приведена с комментариями таблица значений нижней и верхней границ для интеграла вероятностей $\Pr(x \leqslant \alpha)$.

7 В295. Таблицы для решения экспоненциального уравнения $\exp(-a)+ka=1$. Simpson J. A., Welch B. L. Table of the bounds of the probability integral when the first four moments are given. «Biometrika», 1960, **47**, № 3-4, 399—410 (англ.)

Корень a уравнения $e^{-a}+ka=1$ протабулирован с семью десятичными знаками для $k=0{,}050\,(0{,}001)\,1{,}000$. Для значений $k<0{,}05$ можно положить с погрешностью, не превосходящей $4{,}2\cdot10^{-8}$, $a=1/k$.

7 В296. Вычисление ядерных четырехполюсных интегралов. II. Narumi H., Watanabe T., Kato Y., Saika A. Evaluation of nuclear quadrupole coupling integrals. II. «Досися дайгаку рикогаку кэнкю хококу, Sci. and Engng Rev. Doshisha Univ.», 1960, **1**, № 2, 191—224 (англ.)

Рассматриваются интегралы типа

$$\int_1^\infty \int_{-1}^{1} \omega(\lambda_1, \mu_1) e^{-2\delta\lambda_1} \ln\frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \lambda_1^\alpha \mu_1^\gamma d\tau_1'' \int_1^{\lambda_1} \lambda_2^\beta e^{-2\delta\lambda_2} d\lambda_2.$$

Приведены примерно с пятнадцатью знаками значения этих интегралов для $\gamma = 0(2)8$, $\alpha = 0(1)9$, $\beta = 0(1)9$.

7 В297. Таблица коэффициентов Фурье для присоединенных функций Лежандра. Hofsommer D. J., Potters M. L. Table of Fourier coefficients of associated Legendre functions. «Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.», 1960, **A63**, № 5, 460—480; «Indagationes math.», 1960, **22**, № 5, 460—480 (англ.)

Приведена с восемью десятичными знаками таблица значений коэффициентов Фурье $a^m_{n,k}$ и $b^m_{n,k}$ для $n = 0\,(1)\,31$, $m = 0\,(1)\,n$ в разложениях

$$\overline{P}^{2m}_{2n}(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a^{2m}_{2n,2k} \cos 2k\theta,$$

$$\overline{P}^{2m+1}_{2n}(\cos\theta) = \sum_{k=1}^{n} b^{2m+1}_{2n.2k} \sin 2k\theta,$$

$$\overline{P}^{2m}_{2n+1}(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a^{2m}_{2n+1,\,2k+1} \cos(2k+1)\theta,$$

$$\overline{P}^{2m+1}_{2n+1}(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} b^{2m+1}_{2n+1,\,2k+1} \sin(2k+1)\theta.$$

Предполагаемая точность — единица последнего знака. Приведена также дополнительная десятизначная таблица (для тех же значений m и n) для нормирующего множителя N^m_n. В. К. Саульев

7 В298 К. Восьмизначные таблицы тригонометрических функций. 3 изд. (Гл. упр. геод. и картогр. МВД СССР). М., Геодезиздат, 1959, 277 стр., 18 р. 50 к.

Протабулированы функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и $\cos x$ и их первые разности для $x = 0\,(10'')\,90°$.

7В299 К. Таблицы вероятностных функций Т. 2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{a^2}{2da}}$. Обработка таблиц и перев. с англ. Барк Л. С. М., Вычисл. центр АН СССР, 1959, 344 стр., илл., 15 р. 75 к.

Книга из серии «Библиотека математических таблиц», вып. 3. Оригинал настоящего второго тома (том 1 см.

РЖМат, 1961, 2В208) был издан в 1942 г. В книге приводятся значения функций

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

с пятнадцатью десятичными знаками для $x=0\,(0{,}0001)\,(0{,}001)\,7{,}800$ (переменный) 8,285 и значения функций $Q(x)$ и $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha$ с семью значащими цифрами для $x=6\,(0{,}01)\,10$.

М. К. Керимов

См. также: 7Б146, 7Б349, 7В33, 7В35, 7В37, 7В43, 7В45, 7В64, 7В66, 7В68, 7В130, 7В177, 7В183, 7В221К, 7В306—7В310, 7В312, 7В313, 7В325

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

7 В300. Система исчисления в остатках. Garner Harvey L. The residue number system «IRE Trans. Electron. Comput.», 1959, 8, № 2, 140—147 (англ.)

Подробно излагаются вопросы, связанные с представлением целых чисел в системе исчисления в остатках (с. о.), когда целому числу S ставится в соответствие представление $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $S\equiv a_i \pmod{m_i}$ $(1\leqslant i\leqslant t,\ 0\leqslant a_i<m_i)$, a_i и m_i — натуральные числа. Для расширения области представимых в с. о. чисел S основания (модули) m_i необходимо брать попарно простыми. Показывается, что операции сложения и умножения в с. о. являются поразрядными циклическими операциями по соответствующим модулям. Обсуждаются вопросы представления отрицательных чисел и выполнения операции вычитания. Рассматривается связь представлений чисел в весовой системе исчисления (с. в.) и в с. о. Основной недостаток с. о.— сложность выполнения операции сравнения двух чисел, а следовательно, и операции деления. Автором рассмотрен алгоритм аппаратного решения задачи преобразования из с. о. в с. в., который может быть положен в основу выполнения операций сравнения и деления. Библ. 7 назв.

М. И. Нечепуренко

7 В301. Арифметика с плавающей запятой. Wadey W. G. Floating-point arithmetics. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 2, 129—139 (англ.)

Рассматриваются три вида арифметик с плавающей запятой с контролем ошибки. В арифметике FPM (Floating-Point-Metropolis) числа не нормализуются; таким образом представленное число имеет ошибку плюс или минус половина наименьшей значащей цифры. Выводятся (для любого основания) общие критерии сдвига для умножения. В арифметике FPE (Floating-Point with Error computation) числа представлены в нормализованном виде, но вместе с числом указывается число верных знаков в данном числе. В арифметике FPS (Floating-Point with Significacance), в отличие от арифметики FPE, знаки после последней верной цифры отбрасываются. Для каждой арифметики рассматриваются ограничения и наиболее пригодные области применения.

Н. Н. Поснов

7 В302. АЛГОЛ-60—международный язык вычислительных машин. Yngvell Sven. Algol 60—ett internationellt datamaskinsspråk. «Tekn. tidskr.», 1960, 90, № 40, 1087—1091 (шведск.)

Рассматриваются основные положения новой модификации международного алгоритмического языка, которая получила название АЛГОЛ-60. Вначале автор кратко рассматривает идеи абсолютного кодирования (программирования в истинных адресах машины), псевдокодирования (программирования в относительных адресах машины) и автокод. После этого рассматриваются эталонный язык, язык публикаций и язык конкретных представлений для АЛГОЛ-60. Приводятся простейшие примеры для записи алгоритмов на описываемом языке.

Д. А. Поспелов

7 В303. Язык для обработки данных типа списков компилятивного типа в системе ФОРТРАН. Gelernter H., Hansen J. R., Gerberich C. L. A Fortran-compiled list-processing language. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 2, 87—101 (англ.)

В целях облегчения программирования задачи моделирования машины для доказательства теорем геометрии на ИБМ-704 был разработан язык для обработки символических выражений (FLPL) в сочетании со специальным образом организованной памятью («ассоциативная память» Newell-Shaw-Simon (NSS)), ставивший целью максимальное использование удобств программирования в системе ФОРТРАН. По существу это расширение «словаря» языка системы ФОРТРАН для работы с памятью типа NSS. Необходимые для этого дополнительные функции осуществляются в основном подпрограммами, действия над которыми подчиняются правилам действий над функциями в языке системы ФОРТРАН. Таким образом, объединяя исходные дополнительные операции согласно правилам системы ФОРТРАН, можно получить операции и подпрограммы обработки данных произвольной сложности в памяти структуры типа NSS. Приводятся примеры дополнительных исходных операций различных классов, осуществляющих перемещение, запоминание, обработку и поиск информации, генерирование списков, вспомогательные и специальные функции. Помимо этого, в распоряжении программиста остаются все возможности обычной системы ФОРТРАН. Благодаря компилятивному характеру процесса составления и выполнения программ предлагаемая система дает значительный выигрыш в скорости (примерно в пять раз по оценке авторов) по сравнению с теми же программами, записываемыми на языке обработки данных IPL Newell-Shaw-Simon, который имеет интерпретативный характер.

В. И. Смирнов

7 В304. Цифровая машина с программированием в виде математических формул. Kämmerer W. Zifferrechenautomat mit Programmierung nach mathematischem Formeldild. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, 40, Sonderh., 66—76 (нем.)

Программа вычислений для цифровых вычислительных машин обычной структуры состоит из команд, одна часть которых задает операцию, а другая — один или несколько адресов величин, участвующих в операции. Поэтому математическая формула должна быть расписана в этих машинных командах с указанием адресов промежуточных результатов. Распространенные в настоящее время методы автоматизации программирования облегчают эту задачу путем автоматического составления машинной программы вычисления формулы по исходной информации к ней с помощью специальных программ. В данной работе рассматривается возможная техническая реализация прямого задания математической формулы из некоторых допустимых элементов непосредственно устройству управления вычислительной машины без предварительного составления программы из машинных команд. Для этого структура и функции отдельных устройств машины видоизменяются следующим образом. Устройство управления содержит некото-

рое количество регистров «собственной памяти» и в каждый момент времени имеет дело только с одним из них, называемым «регистром текущего состояния» (р.т.с.). Каждый код допустимого элемента формулы (знак арифметической операции, прямая и обратная скобки, адреса величин, участвующих в формуле, и др.) занимает отдельную команду. Формула записывается в виде последовательности составляющих ее допустимых элементов (например, $a—b+c(e+k) \Rightarrow x$). Действие устройства управления определяется не только текущей командой, выбранной из запоминающего устройства, но и информацией в р.т.с. В зависимости от комбинации нового элемента формулы с информацией в р.т.с., а в случае, если элементом является знак умножения, то и в зависимости от последующего элемента устройство управления выполняет строго определенные для каждого сочетания действия. Так, если новый элемент является адресом величины, то производится передача содержимого ячейки запоминающего устройства, определяемой этим адресом, в регистр результата (р.р.) арифметического устройства, вне зависимости от информации в р.т.с. В случае знака сложения, например, производится операция, указанная в р.т.с. (в результате маркировки, произведенной в предыдущих операциях), причем в качестве первого аргумента берется число из р.т.с., в качестве второго аргумента — число из р.р., а результат направляется в р.т.с. с одновременной пересылкой туда же и кода знака сложения (маркировка р.т.с.). В случае знака прямой скобки регистром текущего состояния становится следующий в порядке возрастания номера регистр внутренней памяти устройства управления с одновременной маркировкой его кодом операции сложения. Приводится описание действий устройства управления для нескольких основных элементов формул. Эти правила действий соответствуют алгоритму последовательного просмотра формулы, осуществляющего запоминание операций и значений величин в случае, если их нельзя выполнить сразу же, или выполнение всех тех запомненных операций, как только на определенном этапе становится возможным их выполнение. Так, например, при вычислении формулы $a—b+c(e+k) \Rightarrow x$ в соответствии с принципом последовательного просмотра будет использовано три р.т.с. Рассматривается возможность включения в число допустимых элементов формулы знаков функций, определяемых подпрограммами. Развитие работ в данном направлении позволит облегчить программирование на основе языка, общего для машины и математика, в отличие от программных методов автоматизации программирования, приводящих к значительному отличию машинного языка от языка программиста. В. И. Смирнов

7 В305. Универсальный переводчик машинного языка. Bonney R. B. A universal computer language translator. «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 230—233 (англ.)

Часто возникает необходимость передать данные с одной вычислительной машины на другую. Однако методы кодирования чисел в разных вычислительных машинах бывают различными, что очень затрудняет прямой обмен информацией. Существующие устройства промежуточного преобразования информации не являются универсальными. В данной статье кратко излагается описание работы универсального переводчика машинного языка. Чтобы устройство могло использоваться в разных применениях, оно собирается из отдельных модулей. Подобрав соответствующую комбинацию модулей, можно приспособить переводчик к выполнению любой операции над передаваемой информацией. Переводчик выполняет как преобразование формата записи, так и преобразование кода. Преобразование формата затрагивает преобразование физических характеристик входных данных в требуемую форму выхода; например, преобразование входных данных, записанных на перфоленте или на перфокарте, в код, записанный на магнитной ленте. Преобразование формата может требоваться также, когда необходимо перевести данные с одной магнитной ленты на другую, имеющую другую скорость и геометрию. В необходимых случаях применяется преобразование кодов. Описанный переводчик демонстрировался на Объединенной западной (Western Joint) конференции. Пока еще не накоплено достаточно опыта, чтобы оценить работу переводчика. С. А. Раскутин

7 В306. Вычисление определителя. Нейгауз М. Г. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 11—16

Полная программа в командах БЭСМ, краткое описание блок-схемы и инструкция к пользованию программой вычисления определителя квадратной матрицы по методу исключения с выбором главного элемента.

В. И. Смирнов

7 В307. Программа решения системы линейных уравнений по методу исключения с выбором главного элемента. Демков Ю. Н., Сенюков Р. В. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 17—20

Полная программа в командах БЭСМ, краткое описание блок-схемы и инструкция по использованию программы для решения системы $B=AX$ с максимальным порядком, равным 30. В. И. Смирнов

7 В308. Обращение матрицы. Ершов А. П. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 21—26

Дается операторная схема и программа обращения матрицы n-го порядка, реализованная на основе метода, предложенного автором ранее. Программа является стандартной для машины БЭСМ АН СССР.

Г. П. Зеленкевич

7 В309. Организация крупных матричных вычислений. Cohn Stanley H., Ohora Roy M. Organization of large-scale matrix calculations. «Proc. Canad. Conf. Comput. and Data Process., Toronto», 1958. Toronto, s. a., 360—369 (англ.)

Обсуждается вопрос об удобстве матричных записей при решении линейных задач на вычислительных машинах. Рассматривается вопрос об организации учета погрешностей вычисления. В. Ф. Крапивин

7 В310. Программирование метода вычисления собственных значений. Clerc D. Programmation de la méthode de calcul de valeurs propres dite «méthode des matrices allongées». «Note techn. O.N.E.R.A.», 1960, № 60, 12 p., ill. (франц.)

Подробно рассматривается вопрос составления блок-схем программы вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы. А. А. Красилов

7 В311. Ведущая программа вычислений с комплексными величинами. Королев Л. Н. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 45—54

Предлагается вспомогательная программа, облегчающая программирование в случае необходимости выполнять вычисления с комплексными числами. Программа реализована в виде отдельных блоков, осуществляющих выполнение нужной операции над комплексными числами. Приведен перечень равенств, определяющих основные операции над комплексными числами.

Г. П. Зеленкевич

7 В312. Метод П. Л. Чебышева для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена по способу наименьших квадратов. Фалетова А. Я. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 33—38

Предлагается блок-схема для вычисления коэффициентов аппроксимирующего многочлена по способу наименьших квадратов методом Чебышева. В качестве примера реализации этой блок-схемы на трехадресной вычислительной машине приводится программа, составленная

для машины БЭСМ АН СССР. Программа содержит 128 команд и 5 $(n+1)$ рабочих ячеек, где $n+1$—число точек интерполяции. Г. П. Зеленкевич

7 В313. Программа интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунга-Кутта с автоматическим выбором шага. Сарагович А. И. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 39—44

Полная программа в командах БЭСМ, краткое описание программы, блок-схемы и указания по ее использованию. В. И. Смирнов

7 В314. Программа печати линейных участков. Панова Л. Д. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 3—10

Предлагается блок-схема и программа ЛУЧ, предназначенная для контроля и облегчения отладки, программ. Основная программа пропускается через ЛУЧ, которая печатает информацию о каждом линейном участке основной программы в виде:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{k-1} & \beta_k & 0 \\ \alpha_k & \beta_k & 0 \\ 0 & n-1 & 15 \\ \alpha_k & \beta_{k+1} & 0, \end{array}$$

где α_k—начало линейного участка, β_k—конец линейного участка, n—число повторений этого участка.

Г. П. Зеленкевич

7 В315. Программа счета с удвоенным числом разрядов. Войтишек В. В. «Сб. стандартн. и типовых программ для БЭСМ». М., АН СССР, 1960, 55—74

Даются формулы счета, общая блок-схема, программа и инструкция к пользованию программой для вычислений с удвоенным числом разрядов. Программа предназначена для расширения диапазона чисел по $2^{2^{31}}$ и увеличения значащих цифр результата. Г. П. Зеленкевич

7 В316. О некоторых приемах программирования в коде ЭВМ ГИФТИ и выборе системы кодирования в машинах последовательного типа. Гильман А. М. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 3. М., Физматгиз, 1960, 139—148

Рассматриваются некоторые приемы использования ячеек переадресации при программировании для электронной вычислительной машины последовательного типа на примере машины ГИФТИ, а именно: замещение, наложение, вторичное формирование. Предлагаемые приемы экономии ячеек запоминающего устройства, а также система кодирования, разработанные для машины ГИФТИ, позволяют строить существенно более короткие программы, что приводит к увеличению быстродействия машины. Г. П. Зеленкевич

7 В317. Предлагаемые стандартные символы для применения в блок-схемах. —. Proposed standard flow chart symbols. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, 2, № 10, 17—18 (англ.)

Предлагается ввести стандартные обозначения блоков и узлов в блок-схемах, создаваемых программистами при решении задач. Например, предлагается вычисление функции или операцию изображать прямоугольником, подпрограмму — шестигранником, начало и конец вычисления отмечать соответствующими надписями в овале и т. д. Г. П. Зеленкевич

7 В318. Автоматическое программирование на вычислительной машине ДЭЮКЕ. Robinson C. Automatic programming on DEUCE. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton, 1st-3rd Apr., 1959», Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 111—126 (англ.)

Описываются программирующие системы, автоматизирующие процесс составления программ на цифровой вычислительной машине ДЭЮКЕ (DEUCE). Система STAC (Storage Allocation and Coding) рекомендуется для программистов, изучивших таблицу машинных команд, но не знакомых с техникой оптимального программирования, связанной с особенностями работы запоминающего устройства машины ДЭЮКЕ (в машине имеются ртутные линии задержки и магнитный барабан). Составление программы при использовании STAC оканчивается написанием команд плавающей диаграммы в машинном коде с использованием символических обозначений. Машина обрабатывает введенную программу по определенной схеме, заменяя символические адреса действительными, также производит работу по распределению памяти и оптимальному программированию. Не все команды программы необходимо писать в машинном коде, имеется несколько «особых команд» (supper instruction), которые система преобразует в машинный код, вставляет в последовательность машинных команд и распределяет их внутренние связи. Переработанная полнокодированная программа выводится на перфокарты вместе со списком истинных адресов, соответствующих символическим адресам, и неиспользованных мест памяти на случай дополнительной модификации программы. TIP (Tabular Interpretive Program) и GIP (General Interpretive Program) — системы интерпретивного характера, ни одна из которых не заставляет программистов изучать структуру вычислительной машины. Условные команды этих систем записываются числами *a, b, c* (3 адреса) и *r* (функция, указывающая номер одной из библиотечных подпрограмм). Система TIP разработана в «Bristol Aero Engines». Рекомендуется при составлении программы вычислений, которые могут быть выполнены на настольной вычислительной машине, имеющей печатающее устройство с листом бумаги, разграфленным на 128 столбцов и 30 строк, и стирающее устройство. Моделью предполагаемого листа являются 128 дорожек магнитного барабана по 32 слова, из них 2 слова предназначены под код порядка и контрольную сумму. Система имеет библиотеку из 31 подпрограммы. Емкость запоминающего устройства 4196 слов. Среднее время интерпретирования условной команды 0,7 сек. при условии заполнения данными всех строк столбца. Операции выполняются одновременно со всеми элементами столбца, которые представляются как числа с блокированной запятой (все числа имеют порядок наибольшего числа, заполняющего целиком разряды одного слова). Код порядка запоминается отдельно. Во время вычислений машина может хранить до 511 команд. Система GIP разработана в «National Physical Laboratory» 4 года назад для программирования задач линейной алгебры. Система имеет библиотеку из 200 подпрограмм. Обращение к любой подпрограмме расшифровывается как операция над матрицами, имеющими заданное число строк и столбцов. Одновременно можно использовать не более 63 подпрограмм, которые считываются на барабан с дорожки 234 в сторону уменьшения номера. Под условную программу отведены дорожки от 235 до 255. Исходные данные записываются на барабан с нулевой дорожки в оставленное для них место. Общая емкость запоминающего устройства около 7000 слов. Среднее время интерпретирования условной команды 0,5 сек. Во время работы в машине может храниться не более 96 команд. Операции выполняются как с блокированной, так и с плавающей запятой. Предусмотрены средства контролирования интерпретирования в системах TIP и GIP. Имеются: клавишный регистр для ввода дополнительных команд и данных, клавиши останова машины на наперед заданной команде, которая высвечивается на пульте управления. В реферируемой статье приведены примеры написания условных команд и условная программа вычисления определителя второго порядка с элементами, являющимися матрицами. Г. И. Гришаков

7 В319. Дополнительные интерпретирующие и некоторые преобразующие программы вычислительной машины ДЭЮКЕ. Denison S. J. M. Further DEUCE in-

terpretative programs and some translating programs. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers. Brighton, 1st—3rd Apr., 1959». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 127—145

Описываются программирующие системы, разработанные применительно к вычислительной машине ДЭЮКЕ (DEUCE) (реф. 7 В318). Отмечается, что программы, составленные интерпретирующими системами для задач, требующих выполнения множества последовательных операций над одной переменной, занимают больше машинного времени, чем программы, написанные программистом непосредственно в машинном коде для тех же самых задач. Интерпретирующие системы фактически не отражают полной структуры запоминающего устройства, выбранного исходя из принципа получения наибольшего быстродействия при данной стоимости машины. Для удовлетворения несовместимых требований (простота программирования и наибольшая скорость) разработаны системы, занимающие промежуточное положение между интерпретированием и преобразованием условных команд с учетом структуры вычислительной машины. Система GEORGE (General Order Generator) построена с использованием нотации reverse Polish для обозначения последовательных математических действий. Преимущество этой нотации заключается в том, что она может рассматриваться как условный код, так как выражения пишутся непрерывно слева направо, и каждый символ интерпретируется как команда. В GEORGE эта основная нотация дополнена обозначением операций над переменными с несколькими индексами, повторных операций, условных переходов, считывания, перфорирования и т. д. Перед интерпретированием делается некоторое компилирование: символы переводятся в «ключевые слова» (keywords), определяющие требуемые для вычислений подпрограммы. Работающая машина рассматривается как «бегущий накапливающий сумматор» (running accumulator), т. е. регистр, состоящий из последовательности запоминающих ячеек, причем каждая ячейка хранит только одно число на время выполнения операции. Все вычисления выполняются с плавающей запятой. Система «Alphacode» предназначена для того, чтобы дать возможность программисту написать программу преимущественно английскими фразами и математическими знаками свободную от терминологии вычислительных машин. Для обозначения адресов используется буква X с индексом позади. Функция обозначается английским словом. Буква N с индексом обозначает счетчик или константу модификации. Система имеет библиотеку из 64 подпрограмм и память на 2500 чисел. Время интерпретирования в зависимости от функции 0,03 — 0,05 сек. Арифметические операции выполняются с плавающей запятой. Условные команды пробиваются на перфокарты «Hollerith» (по одной на карте) и помещаются в специальную картотеку, из которой могут легко выниматься. Предусмотрены средства контролирования программ. «Steve» — интерпретирующая система, предназначенная для составления программ по расчету термофизических свойств пара и воды в задачах, связанных с паровыми турбинами и теплообменниками. Используемый условный код очень похож на код системы TIP. Имеются специальные функции для вычисления свойств пара и воды. Особое внимание при разработке «Steve» уделялось выделению и обнаружению ошибок, допущенных при приготовлении данных. С этой целью на перфокартах автоматически пробивается: номер и код команды, на которой произошел сбой, и числа, выбранные из указанных ячеек. Система выполняет операции с плавающей запятой. «Easycode» подобно предыдущим системам использует трехадресный условный код, но в обозначении адресов учитывает особенности структуры запоминающего устройства ДЭЮКЕ. В распоряжении программиста имеются 6 блоков (линии задержки) оперативной памяти по 32 слова, обозначенные буквами от A до F, после которых следует двузначное число, соответствующее номеру слова в блоке. Имеется также 192 блока дополнительной памяти (дорожки магнитного барабана). Программы, необходимые для большинства арифметических и логических функций постоянно находятся в быстродействующем запоминающем устройстве. Вычисления выполняются с фиксированной запятой (все числа принимаются по модулю меньше 1, кроме чисел, используемых в счетчиках). Программа пробивается на перфокартах по одной условной команде на карте. Преобразующая программа «Soda» предполагает вычислительную машину, имеющую «короткий накапливающий сумматор» (short accumulator) и два накапливающих сумматора (lower accumulator, upper accumulator), которые могут быть скомбинированы в некоторых командах в двойной сумматор. Массив данных хранится на барабане. Считывание данных в сумматор производится через буферное запоминающее устройство (2 линии задержки). Арифметические и логические операции производятся с числом в сумматоре и числом в буферном запоминающем устройстве (одноадресная логика операций). Одноадресный код включает не более 5 буквенно-цифровых знаков (из них по крайней мере один буквенный). Предусмотрено считывание любого числа с барабана посредством четырех индексных регистров. Функции определяются группами из трех букв, которые имеют мнемоническую связь с описанием операции. Вычисления выполняются как с плавающей, так и с фиксированной запятой. Преобразующая программа считывается вместе с условной программой с перфокарт. Для контроля преобразования предусмотрена индикация номера команды, содержимого сумматоров и индексных регистров. Обработанная программа и данные выводятся на перфокарты. Г. И. Гришаков

7 В320. «Марк-5» — система автоматического программирования для TREAK. Pearcey T., Higgins S. N., Woodward P. M. The Mark 5 system of automatic coding for TREAC. «Annual Rev. Automat. Programming. I. Working Conf. Automat. Programming Digit. Computers, Brighton, 1st—3rd Apr., 1959». Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1960, 23—31 (англ.)

«Марк-5» — пятая по счету из серии экспериментальных программирующих систем, разработанных для вычислительной машины TREAK, включает преобразующую программу, содержащую около 8000 машинных слов. Программа разбита на ряд подпрограмм, выполняющих определенные преобразования. Максимальная величина подпрограммы составляет около 500 машинных слов. В запоминающем устройстве на ферритовых кольцах емкостью 2048 15-разрядных слов постоянно хранится интерпретирующая программа в 1000 команд, предназначенная для вычисления функций: модуля, квадратного корня, арктангенса и т. д. Для выполнения текущих вычислений в машине имеется запоминающее устройство—24 катодно-лучевые трубки (512 машинных слов) и магнитный барабан (8000 машинных слов). Длина машинного слова 24 двоичных разряда. Время выполнения одной стандартной операции 60 мксек. Из арифметических операций стандартными являются сложение и вычитание. Умножение и деление программируются. Нотация системы «Марк-5», составленная с учетом особенностей машины TREAK, включает: полные английские слова, алгебраические символы, числовые константы, знаки +, —, / (обозначение деления), круглые и квадратные скобки, запятую, двоеточие и троеточие (: .). При обозначении умножения символы пишутся рядом. Условная программа (программа, написанная языком «Марк-5») составляется из небольших блоков, свободно помещающихся в быстродействующем запоминающем устройстве. Программный блок комплектуется из «предложений (sentences), обычно начинающихся «глаго-

лом» (verb), после которого ставится двоеточие. Глагол управляет «дополнениями» (clauses), состоящими обычно не более чем из трех «фраз» (phrase). Первая фраза указывает «объект» управления (object phrase), вторая — область величин объекта (adverbial phrase) и третья фраза (parenthesis)—это «вводные слова», полезные для объяснительных целей, но при преобразовании машиной во внимание не принимаются. Если в блоке имеются предложения с одинаковыми глаголами, то, как правило, глагол во 2-м, 3-м и т. д. предложениях опускается. При написании программы блоки нумеруются. Нумерация предложений в блоке не обязательна. В статье помещен список глаголов, используемых в «Марк-5», и объясняется их управление. В качестве примера приводится условная программа отыскания корней квадратного уравнения. Г. И. Гришаков

7 В321. Отостат (Autostat) — **язык для статистической обработки данных.** Douglas A. S., Mitchell A. J. Autostat: a language for statistical data processing. «Comput. J.», 1960, **3**, № 2, 61—65 (англ.)

Описывается информационный язык, в котором возможно представлять данные для статистической обработки в связи, например, с коммерческими обозрениями. Язык легок в использовании и удобен при программировании для электронной вычислительной машины. Даются ограничения в использовании языка при программировании для электронной вычислительной машины.

И. А. Петухов

7 В322. Приложение графов и булевых матриц к программированию для вычислительных машин. Marimont Rosalind B. Applications of graphs and Boolean matrices to computer programming. «SIAM Rev.», 1960, **2**, № 4, 259—268 (англ.)

Популярное изложение основных концепций теории графов и свойств булевых матриц, соответствующих графам. Отмечено, что аппарат графов и булевых матриц нашел в настоящее время самые широкие приложения. В данной работе предложено использовать булевы матрицы для нахождения неисправностей в программах, на основании анализа свойств предельной матрицы и степеней исходной матрицы. Это, в частности, позволяет выявить изолированные и предельные команды и возможные зацикления в программах. Основная трудность приложения — наличие в вычислительных программах итерационных циклов. Автором намечены два пути устранения этого затруднения. Библ. 9 назв.

М. И. Нечепуренко

7 В323. Методы ухода за цифровыми вычислительными машинами. Liguori Fred. Maintenance methods for digital computers. «Computers and Automat.», 1959, 8, № 12, 20, 22, 24 (англ.)

Описываются некоторые методы нахождения неисправностей в универсальных цифровых вычислительных машинах. Первый метод основан на использовании тест-программы, которая хранится в постоянной памяти машины. Время проверки при таком методе проверки получается минимальным. Мало влияют возможные ошибки оператора, от которого не требуется высокой квалификации. Недостатком является необходимость в дорогом устройстве постоянного хранения информации. При втором методе проверки тест-программа хранится в оперативном запоминающем устройстве и вводится туда перед каждой проверкой. Нет необходимости в устройстве постоянной памяти. Для сокращения времени ввода тест-программы предлагается совмещать ввод тест-программы с некоторыми операциями машины. Однако в некоторых непредвиденных случаях с помощью тест-программы бывает невозможно отыскать неисправность. Могут быть сбои и в самой тест-программе. При третьем методе проверка осуществляется с помощью ручного управления. Этот метод с успехом может применяться на небольших и несложных машинах. Такая проверка не зависит от машины. Очень важным является опыт и знания обслуживающего персонала, его знакомство с машиной. При таком методе проверки обычно затрачивается много времени. Проверка запоминающего устройства ручным способом непрактична. С. А. Раскутин

7 В324. Некоторые математические и программные методы, использованные в работе научного вычислительного центра. Howland J. L., Smillie K. W. Some mathematical and programming techniques employed in the operation of a scientific computing facility. «Proc. Canad. Conf. Comput. and Data Process., Toronto», 1958. Toronto, s. a., 78—87

Краткий обзор деятельности отдела обработки данных кампаний вычислительных устройств Канады и некоторые выводы из трехлетнего опыта применения электронных вычислительных машин средней скорости (NCR 102-A, NCR 102-D, Bendix G-15 D) в области научных и инженерных вычислений и обработки данных для военных целей. Кратко характеризуются созданные библиотечные программы для различных классов задач, а также для целей облегчения подготовки и отладки программ. В. И. Смирнов

7 В325. Автоматическое конструирование логических цепей. Bartee T. C. Automatic design of logical networks. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif.», 1959. New York, 1959, 103—107 (англ.)

Говорится о разработке лабораторией Линкольна ряда универсальных программ, автоматически определяющих оптимальные схемы для решения различных трансцендентных функций: $\sin x$, $\arcsin x$ и т. д. Эти схемы затем собираются из стандартных элементов цифровой машины и используются для вычисления различных функций, хранящихся в памяти машины. При реализации этих схем используются только три действия: логическое сложение, логическое умножение и инверсия. Приводятся стандартные логические схемы для реализации этих действий, а также дается пример конструирования схемы для вычисления синусов углов. По известной таблице углов от 0 до 90° с шагом 6° и их синусов (приведенных также и в двоичной системе счисления) находятся передаточные функции для каждого разряда синуса в символах Буля. Затем с помощью техники минимизации получается окончательное выражение $f(x)=\sin x$ в виде суммы произведений, которое выводится на печать. Техника минимизации состоит в последовательном сравнении членов канонического уравнения друг с другом и осуществляется по формуле $\varphi\alpha'+\varphi\alpha=\varphi$, где «′» — знак инверсии. Затем на основании полученного выражения производится соединение стандартных элементов в логические схемы. Для выполнения описанной программы требуется большая память, так как, кроме исходных величин, необходимо хранить промежуточные результаты процесса минимизации. Эта программа была составлена для универсальной шестнадцатиразрядной машины «Whirlwind» в Массачусетском технологическом институте. Машина производит выдачу канонического выражения для каждого разряда на выходе (при двенадцати входных разрядах и четырнадцати выходных) за 40 сек. Минимизация и печать окончательного выражения производится за 8—10 мин. В качестве «памяти» используется магнитный барабан. Сейчас разрабатывается программа для ИБМ-709.

З. Б. Воронкова

7 В326. Конструирование статических схем управления.—. Designing static control circuits.—. «Mach. Design», 1959, **31**, № 20, 117—123 (англ.)

Обсуждаются вопросы конструирования схем управления (регулирования) из статических логических элементов И, ИЛИ, НЕТ, «памяти» и «задержки». Синтез осуществляется на основе замены релейных схем их логическими эквивалентами. Разбирается ряд примеров и приводится подробная таблица релейных эквивалентов логических элементов. М. И. Нечепуренко

7 В327. Логика сложения с образованием условных сумм. Sklansky J. Conditional—sum addition logic.

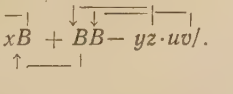
«IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 2, 226—231 (англ.)

Описан новый метод построения быстродействующего сумматора, использующий сложение с образованием условных сумм. Он имеет определенные преимущества перед известными типами сумматоров, включая и преимущество в скорости работы. Сложение производится в течение последовательных временных интервалов $\tau_0, \tau_1, \ldots$ Сначала образуются две пары сумма—перенос в каждом разряде, которые соответствуют двум значениям переноса из предыдущего разряда (0 или 1). В течение интервала τ_1 образуются условные суммы для соседних пар разрядов при тех же условиях и т. д. Образование условных сумм и переносов производится переключающими схемами, построенными на основе стандартных схем И, ИЛИ, НЕТ. При последовательном вычислении сумм возможно видоизменение основной схемы, позволяющее получить значительный выигрыш в скорости работы. Оно осуществляется путем запоминания результатов предыдущего цикла для их использования в следующем цикле. Описанная логика применима и для двоично-десятичных сумматоров. При практическом использовании подобных устройств возможно применение модульных конструкций, что является весьма привлекательным, особенно в свете последних достижений полупроводниковой техники.

Ю. А. Соловьев

7 В328. Логика безадресной вычислительной машины для вычисления простых арифметических выражений. Pawlak Z. Organization of the address—free digital computer for calculating simple arithmetical expressions. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn.», 1960, **8**, № 4, 193—195 (англ.; рез. русск.)

L_1—формализованный язык с переменными $p, q, \ldots$; Δ_1, Δ_2—символы операторов, (,)—скобки. Если α и β—переменные, то $(\alpha\Delta_i\beta)$ является формулой в L_1. $(\alpha\Delta_i\beta)$ является также формулой в L_1, если α и β сами являются формулами в L_1. L_2—формализованный язык, содержащий следующие примитивные символы: p, q, r—переменные, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$—операторы, B—буква, отличающая свободное место в регистре памяти. В L_2 формула определяется следующим образом: а) Если α и β являются переменными или имеют значение B, то $\alpha\beta\Delta_i$ будет формулой в L_2. б) Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$—формулы в L_2, то последовательность $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ также является формулой в L_2. в) Если α—формула в L_2, то $B\alpha$—также формула в L_2. Предыдущими работами автор утверждает, что каждой формуле Φ в L_1 соответствует только одна формула Ψ в L_2, причем может быть задан алгоритм перевода Φ в Ψ. При этом оказывается, что результат вычисления элементарного выражения α_i нужно помещать в том месте, где записана ближайшая слева от α_i буква B (ближайшее свободное место в регистре). Так, формуле $[x + ((yz) - (u/v))]$ в L_1 соответствует формула $BxB + BB - yz \cdot uv/$, которую можно представить следующим образом



Стрелки показывают, куда должен быть помещен результат вычисления каждого элементарного выражения. Машина с такой логикой должна содержать регистр памяти, арифметическое устройство и переключающую схему. Регистр памяти разделен на ячейки, в которые записываются числа, символы операторов или B. Переключающая схема позволяет производить запись в ближайшую пустую ячейку. Если регистр выполнен в виде бумажной ленты, то после каждого вычисления лента должна сдвигаться вправо на три деления (ячейки).

Ю. А. Соловьев

7 В329. Логические методы ускорения умножения в цифровых вычислительных машинах. Карцев М. А. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 4. М., Физматгиз, 1960, 111—120

Рассматривается влияние выбора основания позиционной системы счисления на эффективность применения логических методов ускорения умножения. Рассматриваются логические методы, ускоряющие умножение путем усложнения лишь схемы управления без увеличения количества оборудования в основной схеме арифметического устройства. Определяется математическое ожидание количества тактов сложения, вычитания, требуемых для выполнения умножения и среднее число тактов сложения-вычитания, приходящееся на один разряд множителя. Оцениваются различные основания системы счисления с точки зрения скорости выполнения умножения при использовании самых выгодных логических методов ускорения умножения.

О. В. Бачин

7 В330. Сокращение числа диодов в дешифрирующих и кодирующих матричных схемах. Freilich Arthur. Eliminating diode redundancy in encoding and decoding matrices. «Control Engng», 1960, **7**, № 6, 110—114 (англ.)

Рассматриваются методы оптимального составления диодных матричных кодирующих и декодирующих схем с точки зрения экономии количества диодов. Преимущественно рассмотрение касается преобразования данных из какого-либо одного условного кода в другой. Например, рассматривается диодная схема управления светящейся панелью для представления десятичных цифр: согласно двоичному коду нужной цифры должны зажечься нужные элементы световой панели (всего 7 элементов). Однако описанная методика может быть полностью применена и к построению обычных диодных дешифраторов (в соответствии с заданным двоичным кодом должна быть выбрана одна выходная шина), преобразователей и т. д. Автором сформулированы 3 основных правила сокращения числа диодов и рассмотрены основные возможные варианты. Последовательное применение этих правил позволяет итеративно приблизиться к оптимальной схеме. Для схем с большим числом диодов приходится первоначально составлять таблицы экономии диодов, что позволяет наметить кратчайший путь к оптимуму. Наряду с вышеописанным примером кодирующей матрицы приведен пример обратной (декодирующей) системы — для перевода чисел из двоично-десятичной системы счисления в десятичную.

А. А. Крупский

7 В331. Таблицы для разработки схем логических элементов, используемых в цифровой вычислительной технике. Rösler H. Tafel für den Entwurf von Verknüpfungsschaltungen in der digitalen Rechentechnik. «Elektronik», 1960, **9**, № 8, 228—232 (нем.)

Кратко излагаются основные принципы действия логических элементов, используемых в современных цифровых вычислительных машинах, и рассматриваются возможные способы аппаратурной реализации этих элементов. Приведена таблица схем реализации восьми типов логических элементов с одним, двумя и тремя входами, базирующихся на использовании контактов, диодов, двойных триодов, пентодов, транзисторов и магнитных сердечников. В примечаниях к таблице изложены условия, необходимые для успешной работы каждой из схем — соотношения между величинами напряжений, подаваемых на различные их элементы, требуемая полярность и форма сигнальных импульсов, исходные состояния элементов схем и пр.

Б. Е. Бердичевский

7 В332. Символический анализ разложения устройства переработки информации. Hartmanis J. Symbolic analysis of a decomposition of information processing machines. «Inform. and Control», 1960, **3**, № 2, 154—178 (англ.)

Рассмотрены вопросы замены сложной машины для обработки информации несколькими более простыми, работающими параллельно. При этом дано соответствующее математическое обоснование, использующее многие идеи современной алгебры. Оно приводит к созданию

собственной теории переключателей, которая в значительной степени отличается от классической. В частности, дистрибутивный закон выполняется лишь в специальных случаях, для которых выведены необходимые и достаточные условия. Применив результаты этой теории, автор дает необходимые и достаточные условия для возможности замены сложной машины более простыми, работающими параллельно, причем нужные упрощения также могут быть найдены. В качестве примера описан процесс сложения чисел по модулю 6, который может быть заменен комбинацией сложений по модулю 2 и 3. Этот случай обобщен. Сложение по модулю N, когда $N=n_1n_2...n_k$ (n_i — целое), также можно произвести, если найти предварительно суммы по модулям n_1, n_2,..., n_k. Описанные методы позволяют строить системы с повышенной надежностью или с большим быстродействием, которое достигается за счет увеличения оборудования.

Ю. А. Соловьев

7 В333. Новый метод вычислительной техники. Lindaman Richard. A new concept in computing. «Proc. IRE», 1960, 48, № 2, 257 (англ.)

Предлагается метод описания работы переключательных схем, использующих пороговые элементы (пороговым элементом называется переключательный элемент, имеющий n входов и один выход и обладающий тем свойством, что выходной сигнал передает значение 1 тогда и только тогда, когда на любые m из n входов поступают сигналы, передающие значение 1; величина m иногда называется порогом возбуждения элемента), средствами специальной алгебры, заданной на множестве двух элементов 0 и 1 и имеющей 2 операции: операцию отрицания, совпадающую с операцией отрицания в алгебре Буля, и «пороговый оператор». Пороговый оператор (Maj) связывает соответствующие переменные таким же точно образом, как преобразуются сигналы в пороговом элементе. Соотношения, записанные с использованием такой алгебры, называются пороговыми функциями. Описывается метод перехода от булевых функций к пороговым функциям, применимый при следующих ограничениях: а) разрабатываемая схема имеет не более 3 входов; б) каждый пороговый элемент имеет не более 3 входов; в) в схеме отсутствуют запоминающие элементы. Переход выполняется в 2 шага. Первый шаг состоит в представлении заданной функции $f(A_1,A_2,A_3)$ в следующей форме:

$$f(A_1, A_2, A_3) =$$

$$= X[f_1(Y, Z) \vee f_2(Y, Z)] \vee \bar{X} f_3(Y, Z) f_4(Y, Z), \qquad (1)$$

где X, Y и Z представляют булевы переменные A_1, A_2 и A_3 (в любой последовательности) или их отрицания, а f_1, f_2, f_3 и f_4 — функции, выбранные таким образом, чтобы удовлетворялось равенство (1). С учетом того, что функции f_i являются функциями только Y и Z, равенство (1) может быть упрощено и приведено к следующему виду:

$$f(A_1, A_2, A_3) = X(f_1 \vee f_2) \vee \bar{X} f_3 f_4. \qquad (2)$$

После того как заданная функция представлена в форме (2), выполняется второй шаг, состоящий в применении теоремы преобразования:

$$X(f_1 \vee f_2) \vee \bar{X} f_3 f_4 = \mathrm{Maj}[X, (Xf_1 \vee \bar{X} f_3), (Xf_2 \vee \bar{X} f_4)], \qquad (3)$$

где Maj — символ порогового оператора. Если после выполнения второго шага какой-либо член в правой части соотношения (3) оказывается записанным не в пороговой форме, то этот член снова преобразуется описанным методом. Два шага преобразования выполняются до тех пор, пока вся функция не оказывается представленной в пороговой форме. Метод иллюстрируется двумя примерами.

А. В. Шилейко

7 В334. Вычислительные машины большого и среднего размера.— Large and medium size computers. «Automat Data Process», 1960, 2, № 10, 30—36, 38, 40, 42 (англ.)

Обзор больших и средних вычислительных машин, выпускаемых и намечаемых к выпуску фирмами Великобритании. Фирма «Ферранти» (Ferranti) выпустила вычислительную машину, предназначенную для коммерческого использования, «Пегас-2» стоимостью от 60 000 до 200 000 фунтов стерлингов. Так же как и «Пегас-1», эта модель выполняет сложение и умножение за 0,3 мсек., умножение за 2 мсек., деление за 5,5 мсек. и использует запоминающее устройство на никелевых линиях задержки. Выпускаемая этой же фирмой вычислительная машина среднего размера «Меркурий» стоимостью около 110 000 фунтов стерлингов специально предназначена для проведения научных и технических расчетов. Она работает с автокодированием и выполняет над числами с плавающей запятой операции сложения и вычитания за 180 мксек., умножение за 300 мксек. На сентябрь 1961 г. намечен выпуск универсальной вычислительной машины «Орион» стоимостью от 120 000 до 300 000 фунтов стерлингов. Конструкция «Ориона» использует «нейтронные» логические элементы, испробованные в машине «Сириус». Такое построение машины позволяет строить сложные системы с минимальным количеством разных элементов. В машине используется разделение времени, несколько программ могут выполняться одновременно с автоматическим определением порядка выполнения программ и входных-выходных операций. При программировании используется автокодирование. При сложении и вычитании содержимое одного регистра плюс или минус содержимое другого регистра передается в третий за 64 мксек. Умножение производится за 64—200 мксек., деление за 100—900 мксек. Машина полностью построена на полупроводниковых триодах и имеет запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью от 4096 до 16 384 48-разрядных двоичных чисел. Входные, выходные и вспомогательные устройства, включающие магнитные барабаны, блоки магнитной ленты, перфораторы, печатающие устройства и т. д., могут подключаться к машине в неограниченном количестве. К производству в 1962 г. намечена большая вычислительная машина «Атлас» стоимостью от 1 000 000 до 3 000 000 фунтов стерлингов. Это сверхбыстродействующая универсальная параллельная вычислительная машина, использующая принцип разделения времени, будет самой большой в мире после машины «Стретч». Быстродействие будет достигнуто за счет полупроводниковых схем, запоминающего устройства на магнитных сердечниках с временем выборки 2 мксек., возможности одновременного выполнения нескольких программ, нового метода быстрого переноса в параллельном сумматоре, и тщательной организации всей машины. Всего используется более 300 команд, из которых около 100 основных, а остальные подготавливаются системой «Экстракод» в специальном быстродействующем запоминающем устройстве. Система адресов позволяет доступ к 2 000 000 ячеек основного запоминающего устройства, использующего магнитные сердечники, магнитные барабаны и постоянную память. Может использоваться 4 и более блоков на магнитных сердечниках емкостью 4096 чисел каждый, любое число магнитных барабанов емкостью по 24 576 чисел. Минимальная емкость постоянной памяти 4096 чисел с возможностью увеличения на 1024 числа. Имеется 128 регистров модификации на 24 разряда каждый. Используется система автокодирования. Входные, выходные и вспомогательные устройства могут подключаться в любом количестве. Сложение и вычитание 48-разрядных двоичных чисел в системе с плавающей запятой производится за 1,1 мксек., умножение и деление за 3,5 мксек. Фирма «IBM United Kingdom» выпускает вычислительные машины среднего размера ИБМ-650 стоимостью от 70 000 до 200 000 фунтов стерлингов, ИБМ-305 РАМАК стои-

мостью от 65 000 до 200 000 фунтов стерлингов, большие вычислительные машины ИБМ-704 стоимостью от 300 000 до 1 000 000 фунтов стерлингов, ИБМ-705111 той же стоимости. Эта же фирма начала выпуск серии полупроводниковых машин. Вычислительная машина ИБМ-7070, построенная по блочному принципу, имеет запоминающее устройство на магнитных сердечниках и дополнительные запоминающие устройства на магнитной ленте и магнитных дисках общей емкостью 12 000 000 чисел. Машина может использовать стандартные программы любой из машин ИБМ и применяет автокодирование. Время сложения и вычитания 60 мксек. для 5 десятичных цифр, 72 мксек. для 10 цифр, умножения от 0,7 до 1,6 мсек. для 10 цифр, деления от 0,8 до 5 мсек. для 10 цифр. Стоимость машины 200 000 фунтов стерлингов. Большая вычислительная машина ИБМ-7080 является полупроводниковым вариантом машины ИБМ-705, однако обладает в 6 раз большей внутренней скоростью. Самая большая машина из этой серии ИБМ-7090 стоимостью 880 000 фунтов стерлингов работает в 6 раз быстрее, чем однотипная машина ИБМ-709 (РЖМат, 1959, 10537, 11629). По специальному заказу изготовляется гигантская вычислительная машина «Стретч», выполняющая свыше 1 000 000 логических операций в 1 сек. Эта машина использует 32 канала обмена данными внутри системы. Фирма «ICT» выпускает полностью полупроводниковую машину 1301 среднего размера, стоимостью от 65 000 до 250 000 фунтов стерлингов, выполняющая сложение и вычитание за 21 мксек., а умножение за 170 мксек. на каждый разряд множителя. Фирма «Leo Computers», выпускающая машину среднего размера «Лео-IIC» стоимостью 125 000 фунтов стерлингов, приступает в 1962 г. к выпуску новой модели «ЛеоIII». Эта полностью полупроводниковая машина, построенная по блочному принципу, будет иметь быстродействующее запоминающее устройство на магнитных сердечниках с автоматическим контролем. Работа будет происходить с числами в различных системах счисления, широкое применение найдет автокодирование и микропрограммирование. Сложение и вычитание будет производиться за 44 мксек., умножение за 0,3—0,7 мсек., деление за 1,2 мсек. Фирма «Remington Rand» выпускает машину среднего размера УНИВАК-80 стоимостью от 120 000 до 220 000 фунтов стерлингов, выполняющую сложение и вычитание за 85 мксек., умножение за 200 мксек., деление за 300 мксек. Предполагаемая к выпуску в конце 1962 г. большая вычислительная машина УНИВАК-III будет производить сложение за 9—22,5 мксек., в зависимости от числа чисел, которых может быть от 1 до 4, умножение за 76,5—184,5 мксек., деление за 76,5—312,5 мксек. Фирма «Standart Telephone & Cables» выпускает вычислительную систему среднего размера, построенную по блочному принципу с использованием мелких модулей. Стоимость системы от 26 500 до 150 000 фунтов стерлингов. Основная машина очень мала. Она включает полупроводниковое арифметическое устройство, устройство чтения перфоленты, перфоратор ленты, и печать, однако к ней могут быть добавлены быстродействующий умножитель, два аккумулятора, которые можно использовать как один двойной, до 4 блоков запоминающего устройства на магнитных сердечниках емкостью по 512 чисел, до 256 ферритовых регистров на одно число, блоки магнитной ленты, устройство на перфокартах, ксерографическое печатающее устройство и т. д. Эта машина выполняет операции сложения и вычитания за 312 мксек., умножения за 11 мсек., деления за 35 мсек. О. В. Бачин

7 В335. Электронные системы обработки данных в американском деловом мире. Hammerton J. C. Electronic data-processing systems for American business. «Electron. Engng», 1960, **32**, № 385, 148—154, 192, 200 (англ.; рез. франц., нем.)

Электронные системы обработки данных получили широкое развитие в последнее время. Наибольшее распространение получили системы, включающие в себя универсальные цифровые машины, имеющие большое и разнообразное количество внешнего оборудования. К таким машинам относятся: ИБМ-7070, RCA-501, NCR-304, Honeywell-800, Transac S-2000, Datatron 220. Основным требованием, предъявляемым к этим машинам, является возможно меньшая стоимость, простота и надежность эксплуатации. Поэтому все современные машины имеют блочную конструкцию. Быстродействующие запоминающие устройства также набираются из отдельных блоков, так что емкость запоминающих устройств может при необходимости варьироваться. В качестве внешних запоминающих устройств обычно используются магнитные ленты шириной $^3/_4$ или $^5/_8$ дюйма на бобинах емкостью 800 *м*; в комплект системы входит восемь таких устройств, однако одно из них всегда может быть заменено специальным переключающим устройством, которое позволяет расширить количество внешних запоминающих устройств еще на восемь и т. д. Специфика работы систем обработки данных состоит в том, что они воспринимают большое количество входных данных при относительно простых вычислительных процессах и выдают большое количество различных таблиц, перечней и т. п. Противоречие между высоким быстродействием самих машин и низким быстродействием электромеханического внешнего оборудования разрешается в системах обработки данных за счет специально предусмотренной возможности работы внешнего оборудования от внешних запоминающих устройств, т. е. помимо машины, которая предварительно выдает выходные данные во внешние запоминающие устройства. Одновременно предусматривается работа внешнего оборудования и от машин, для чего скорости работы внешних устройств повышаются, системы управления машин строятся таким образом, чтобы они могли обслужить одновременно несколько внешних устройств параллельно с работой арифметического устройства машины. Для научного применения машины должны иметь большое быстродействие при выполнении арифметических операций, возможность доступа к информации, хранящейся в быстродействующих запоминающих устройствах при выполнении арифметических операций. Внешнее оборудование научных машин должно обеспечивать ввод-вывод сравнительно небольшого количества данных. Кроме того, должна быть обеспечена возможность работы с плавающей запятой и чисто двоичный код машины, так как последний является естественным «языком» цифровых машин. В состав современной американской системы обработки данных входит, таким образом, центральный обработчик данных, обладающий быстродействующим ферритовым запоминающим устройством, комплект из восьми станций внешних запоминающих устройств на магнитной ленте, и внешнее оборудование, состоящее по крайней мере из считывающего с перфокарт устройства и быстропечатающего устройства. Емкость оперативного запоминающего устройства лежит в пределах от 4000 до 25 000 слов, скорость работы перфокартного оборудования лежит в пределах от 400 до 1000 карт в 1 мин., а скорости печати достигают 900 строк в 1 мин. Арендная стоимость подобной системы составляет от 16 000 до 21 000 долл. в месяц. В добавление к основному внешнему оборудованию часто придается считывающее устройство с перфолент (со скоростью до 1000 слогов в 1 сек.), устройства для перфорации перфокарт, большие запоминающие устройства с произвольным доступом на дисках (емкостью до 6 млн. слогов) магнитных барабанах и коротких магнитных лентах. Новое оборудование предполагает использование магнитных чернил для автоматизации считывания информации. Повышение эффективности работы больших систем обработки данных достигается за счет

одновременной работы их по нескольким (до восьми) независимым программам. Широко используется работа с переменной длиной слова, с буквенно-числовой информацией, с автоматическим программированием, с модификацией и интерпретацией команд. Адресность машин особой роли не играет, и в системах обработки данных используются как 1-, так и 2-, и 3-адресные машины.

Г. Х. Новик

7 В336. Цифровая вычислительная машина ZRA 1 из Иены.— Rechenautomat ZRA 1 aus Jena. «Automatisierung (BRD)», 1960, 5, № 7, 12—13 (нем.)

ZRA 1 разработана в 1956—59 гг. Состоит из следующих основных блоков: вводного устройства с перфокарт, устройства управления, арифметического устройства, быстродействующего запоминающего устройства на 7 ферритовых сдвигающих регистрах, накопителя на магнитном барабане, выводного печатающего устройства и пульта управления. Машина может работать как по системе с фиксированной (11 десятичных разрядов и знак), так и с плавающей запятой (мантисса 9 десятичных разрядов, порядок от —19 до +19). Полная длина слова 48 двоичных разрядов. Обработка информации в машине идет по чисто двоичной системе, числа могут вводиться как в двоичной, так и в двоично-кодированной десятичной системе. Работа может идти в двух режимах — по программе, записанной в накопителе, и по командам с перфокарт от устройства ввода. Команда состоит из 4 частей: операционной, контрольной, пересылочной и адресной. 1-е число перед началом операции должно находиться в регистре результатов. В операционную часть входит указание операции, адрес 2-го числа, знаки для обоих чисел, признак запятой. В контрольной части программируется один из проверочных тестов. Пересылочная часть, кроме указаний «чтение» и «запись», содержит условные и безусловные переходы и остановы и передачу на управление от ввода. В адресной части указывается используемый индексный регистр. указание проводимой индексной операции и разряд для автоматического изменения адресов. Для проведения операций над адресами служит отдельное арифметическое устройство. Два регистра адреса — чисел и команд — позволяют вызывать коды из накопителя без потери времени на ожидание подхода. Машина построена на феррит-диодной логике с ламповым управлением. Специальная контрольная система наблюдает за состоянием ламп. Машина смонтирована в 3 шкафах (габариты 1,3×1,2×2,2 *м*), пульт управления (габарит письменного стола), устройство ввода, печатающее устройство. Содержит 750 генераторных и 280 усилительных ламп, 16 тыс. германиевых диодов, 9200 ферритовых сердечников, 85 реле. Потребляемая мощность 18 *квт*. Магнитный барабан: 12 000 об/мин, 4096 слов, 3 *имп/мм*, 200 *кгц*, расстояние головок от слоя — 30 *мк*, вырабатывает для машины тактовые импульсы (200 *кгц*.). Ввод 80 перфокарт в 1 мин., на каждой карте размещается до 12 чисел. Печать 150 строк в 1 мин. Скорости работы — с фиксированной запятой: сложение 3,8 мсек., умножение 7, деление 14; — с плавающей запятой: сложение 7 мсек., умножение 8, деление 14. Среднее время поиска 2,5 мсек. Округление может выключаться.

И. В. Лебедев

7 В337. ZRA 1 выполняет 350 операций в секунду. Fröhlich Siegbert. ZRA 1 bewältigt 350 Operationen pro Sekunde. Über Arbeitsweise und Anwendungsmöglichkeiten digitaler Rechenmaschinen. «Wirtschaft», 1960, **15**, № 43, 11 (нем.)

Популярная статья об использовании электронных вычислительных машин. Сообщается о последней разработке Центрального института автоматики (ZIA, Иена, ГДР) машины ZRA 1, построенной на ферритовых сердечниках (реф. 7В336).

И. В. Лебедев

7 В338. Цифровая вычислительная машина TR-4. Möller Wolfgang. Digital-Rechenanlage TR 4. «ADL-Nachr.», 1960, № 13, 366, 369—370 (нем.)

Описывается большая вычислительная машина фирмы «Телефункен» (Telefunken, ФРГ) TR-4. TR-4 — полностью полупроводниковая цифровая машина параллельного действия; высокое быстродействие достигается в первую очередь за счет того, что основные устройства (арифметическое устройство (а. у.), устройство управления (у. у.) и запоминающее устройство (з. у.)) имеют независимое местное управление и допускают одновременную работу. Ввод и вывод также осуществляются без остановки вычислений. Тактовая частота машины 2 *мгц*. Основные элементы выполнены на дрейфовых (диффузионных) кристаллических триодах; конструктивно группы элементов (ячейки) монтируются в сменных блоках с печатным монтажом. А. у. машины, наряду с обычными арифметическими и логическими действиями, позволяет производить извлечение квадратного корня, групповые операции и модификацию чисел и команд. Вычисления могут производиться как с фиксированной, так и с плавающей запятой; возможна работа с удвоенной точностью. Умножение в TR-4 с запоминанием переносов, для чего предусмотрен специальный регистр хранения переноса. Микропрограммирование позволяет производить в а. у. действия непосредственно с числами в десятичной системе счисления, минуя операцию перевода в двоичную систему. Число разрядов в машине 52, из них 4 — разряды признака и контрольные разряды. Скорости работы (без времени обращения к з. у.): с фиксированной запятой (двоичная система) — сложение 5 мксек., умножение 30 мксек., деление 105 мксек.; с плавающей запятой (двоичная система) — соответственно 16, 30, 90 мксек; с фиксированной запятой (десятичная система) — соответственно 10, 500, 500 мксек. В у. у. машины, наряду с обычными узлами, имеются узел микропрограммирования и регистр модификации команд и адресов (индексный регистр) емкостью 256 чисел. Кроме стандартных команд, исходя из требований эксплуатации, могут включаться любые специальные команды (всего до 250). Система команд — одноадресная; число разрядов в команде 24 (т. е. $^1/_2$ общего числа рабочих разрядов). З. у. машины выполнено на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса; емкость одного блока з. у. 4096 52-разрядных чисел. Общая емкость з. у. может быть доведена до 7 таких блоков (всего 28 672 числа). Время выборки из з. у. 2 мксек., полное время обращения 6 мксек. Кроме того, имеется устройство постоянной памяти емкостью 1024 (возможно до 4096) 52-разрядных чисел для задания констант, стандартных подпрограмм, программ по входу и выходу и т. д. Входные и выходные устройства машины рассчитаны на работу с перфокартами, перфолентой и магнитной лентой; имеется быстродействующее печатающее устройство. А. А. Крупский

7 В339. Особенности цифровой вычислительной машины LEO IIC. Pinkerton J. M. M. Features of the Leo IIC computer. «Automat. Data Process.», 1959, **1**, № 11, 42—46 (англ.)

Приводятся основные требования к вычислительным машинам, применяемым для обработки деловых данных, и их особенности по сравнению с машинами, предназначенными для математических и научных расчетов. Даются характеристики машины LEO IIC. В машине используется двоичный код. Возможна работа с полным словом (38 разрядов плюс разряд знака) и с полусловом (18 разрядов плюс разряд знака). Код инструкции занимает 19 разрядов. В машине имеется 16 регистров, которые используются для управления сдвигом, для модификации, для непосредственной связи с запоминающим устройством, для суммирования, для хранения множителя и множимого, для хранения результатов и два резервных регистра. Имеется два сумматора. Преобразование информации в двоичную и десятичную форму выполняется с помощью специальной инструкции. Главное запоминающее устройство матричного типа собрано на ферритовых сердечниках и имеет емкость 4096 полных слов или 8192

полуслов. Кроме того, при необходимости могут быть добавлены дополнительные блоки запоминающих устройств емкостью 4096 полных слов. Цикл обращения к памяти составляет 16 мксек. Выборка осуществляется последовательно, поэтому с учетом времени преобразования слова в параллельную форму эффективное время обращения составляет 80 мксек. Проверка правильности передачи информации осуществляется с помощью контроля нечетности. Внешнее запоминающее устройство выполнено на четырех магнитных барабанах, емкость каждого 8192 полных слов. Передача информации осуществляется блоками через буферное устройство. Правильность передач проверяется контролем нечетности. Ввод данных может производиться с пятидырочной перфоленты, с 80-колонной перфокарты, с магнитной ленты. Вывод данных осуществляется либо на перфокарты, либо на магнитную ленту, либо на печать с помощью печатающего устройства. Все операции ввода-вывода могут осуществляться, наряду с вычислениями, так как каждое устройство ввода-вывода имеет собственное буферное приспособление. Внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте работает со скоростью протяжки 2,5 *м* в 1 сек. со временем старт-стопа 10 мсек. Информация записывается на ленту блоками по 160 слогов с частотой 22 *кгц*. Общее количество запоминающих устройств на магнитной ленте может достигать восьми, при этом может иметь место одновременное считывание и запись на различных устройствах на ленте. Машина LEO IIC использует одноадресную систему программирования с возможностью модификации части команд, в состав которых входят арифметические операции, операции передач, преобразования, записи/чтения и т. п. Машина состоит из блоков, использующих специальные электронные лампы с большим сроком службы. В машине используется 7000 ламп и 18 000 полупроводниковых диодов. Питание машины осуществляется от трехфазного генератора.

Г. Х. Новик

7 В340. Организация университетского вычислительного центра. Buckingham R. A. The organization of a university computing centre. «Comput. J.», 1960, **3**, № 3, 131—135 (англ.)

За последние несколько лет в университетах Англии получили широкое развитие вычислительные лаборатории, которые используют вычислительные машины «Меркурий», ДЭЮКЕ, ЭДСАК-2. Вычислительные лаборатории реорганизуются в университетские вычислительные центры, имеющие следующие основные функции: 1) обеспечение обслуживания вычислительными машинами сотрудников университета; 2) обеспечение обучения и стажировки работы на цифровых вычислительных машинах; 3) проведение исследований, связанных с теорией и конструированием и использованием цифровых вычислительных машин. На форму организации вычислительного центра в университете оказывают важное влияние такие факторы, как большое разнообразие задач, относительно небольшое количество обслуживающего персонала, научный характер задач. В университетском вычислительном центре Лондона на машине «Меркурий» решаются физические, химические, кристаллографические, статистические, технические, математические и другие задачи. Наряду с этим, на этой машине производится обучение персонала, примерно 200÷300 человек ежегодно.

Г. Х. Новик

7 В341. Вычислительная машина «CAB-500».— Calculatrice arithmétique binaire «CAB 500». «Instrum. et labs», 1960, № 13, 50—51 (франц., англ.)

Сообщается о новой французской вычислительной машине CAB-500, предназначаемой для исследовательских и проектных лабораторий. Эта машина с внутренним программированием, с фиксированной запятой, последовательного действия, на магнитно-статических элементах. Входная и выходная информация представляется в нормальном альфа-цифровом коде, переводимом машиной в двоичную форму автоматически. Устройства ввода и вывода машины стандартного типа: пишущая машина, трансмиттер, перфоратор для ленты (скорость вывода 10 знаков в 1 сек.). К машине могут быть подсоединены также фотоэлектрический трансмиттер марки SEA тип 1080 (скорость 80 знаков в 1 сек.) и перфоратор марки SEA (скорость перфорации 45 знаков в 1 сек.). Главная память машины — магнитный барабан емкостью 16 384 34-разрядных двоичных чисел. Числа записываются на 128 дорожках, по 128 чисел на каждой дорожке. 34 разряда распределены следующим образом: 32 — число, 1 — контрольный разряд (по четности) и 1 — разделительный разряд. Арифметическое устройство имеет отдельные блоки суммирования и вычитания. С этими блоками непосредственно связаны 16 быстродействующих регистров. Устройство управления машины включает счетчик и регистр команд и сумматор адреса для модификации адресов. Имеется возможность прерывать решение задачи и провести другие расчеты с автоматическим переходом программы на первоначальную задачу. На машине широко используется система автопрограммирования «System PAD» IE, включающая в себя множество микро- и подпрограмм, записанных на магнитном барабане.

К. В. Смирнова

7 В342. Новый метод записи и хранения информации.— Neues Verfahren zur Aufzeichnung und Informationsspeicherung. «Fernmelde-Prax.», 1960, **37**, № 16, 657—661 (нем.)

Сообщается о новом методе хранения информации, использующем изобретенную в США термопластическую ленту. На эту ленту могут наноситься сигналы, получаемые с радарных установок, данные, полученные в виде радиоволн или инфракрасных лучей, а также любые оптические данные. Отмечается, что наиболее эффективно новый метод может быть применен в различных военных областях. При помощи описываемого метода можно получать как черно-белые, так и цветные изображения хранимой информации. Отмечается, что получение этих изображений значительно проще, чем получение фотоотпечатков, и может с успехом применяться на борту самолетов в воздухе, а также на ракетах и искусственных спутниках. Термопластическая лента может хранить количество информации приблизительно в 100 раз большее, чем такая же по площади магнитная лента. В виде примера указывается, что полное содержание 24 томов большой энциклопедии умещается на рулоне термопластической ленты, по объему равной катушке ниток. Термопластическая лента на площади около 6,25 *см*^{2} может хранить 40 млрд. «единиц информации». Фирма, открывшая термопластическую ленту, работает сейчас над созданием ленты, обработка которой протекала бы в течение нескольких секунд, а имеющиеся в настоящее время образцы требуют для запоминания информации несколько минут рабочего времени. Рабочий слой термопластической ленты наносится на носитель, которым служит ацетилцеллюлоза. Этот рабочий слой при определенной температуре плавится. Вся информация содержится в системе микроскопических морщин, образующихся в рабочем слое ленты. Запись производится с помощью электронного пучка, управляемого извне. Это управление осуществляется самим объектом, информация о котором записывается на ленту. При этом форма морщин адекватно отображает форму запоминаемого образа. Размягченный под влиянием электронного пучка рабочий слой деформируется путем образования морщин и после окончания действия пучка застывает. Весь процесс записи занимает время меньшее, чем сотая доля секунды. Для стирания информации требуется просто заново нагреть рабочий слой до температуры плавления. Обычная ширина термопластической ленты равняется 16 *мм*, при необходимости запоминания информации, не помещающейся на такой ленте, используют ленту двойной ширины. Отдельные рельефные картинки из морщин

имеют ширину 5 *мм*. Скорость движения ленты 25 *см/сек*. Если использовать рельефные картинки шириной в 2,5 *мм*, то скорость движения ленты может быть увеличена до 12,5 *см/сек*. Для считывания информации используется модифицированный проектор. Используется несколько источников света, дающих тонкие пучки световых лучей. Эти световые лучи проходят через конденсатор и попадают на движущуюся ленту. Если на ленте нет морщин, то отражений от нее не происходит, и экран проектора остается темным. В противном случае происходит частичное отражение лучей, которое создает необходимую картину на экране проектора. При необходимости получения цветного изображения используется обычная разлагающая в спектр призма.

Д. А. Поспелов

7 В343. Быстродействующее цифровое запоминающее устройство, использующее цилиндрические магнитные пленки. Hoffman G. R., Turner J. A., Kilburn T. High-speed digital storage using cylindrical magnetic films. «J. Brit. Instn Radio Engrs», 1960, **20**, № 1, 31—36 (англ.)

Как плоские, так и цилиндрические магнитные пленки производятся вакуумным испарением железоникелевого сплава на стеклянную подложку. Если испарение производится в магнитном поле, то образцы имеют легкое направление намагничивания и прямоугольную петлю гистерезиса вдоль магнитного поля и тяжелое направление намагничивания и линейную петлю гистерезиса в направлении, перпендикулярном внешнему полю. Цилиндрические магнитные пленки производились с легким направлением намагничивания по окружности пленки, которая наносилась на стеклянную трубку. Для снятия петли гистерезиса использовалась специальная методика, так как ширина петли гистерезиса зависит как от длительности, так и от амплитуды тока. В описанном запоминающем устройстве 16 магнитных пленок наносились на 1 стеклянную трубку, сквозь которую продевался координатный провод X и разрядный считывающий провод. Другой координатный провод Y, охватывающий все разряды одного числа, образовывал многовитковые обмотки, коаксиальные и внешние по отношению к магнитным пленкам. Для того чтобы записать число, импульс тока посылается по избранной координате Y. При этом устанавливалось магнитное поле вдоль длины каждой пленки в этом ряду. Одновременно импульсы тока чуть большей длительности посылаются по всем координатным проводам X, причем полярность их определяет запись «1» или «0» по направлению легкого намагничивания каждой пленки. Эти токи не влияют на пленки, не охваченные током по координате Y, так как амплитуда и длительность тока X менее импульсной коэрцитивной силы. Чтение производится путем подачи импульса тока по координате Y, и «1» и «0» появляются в виде положительных и отрицательных импульсов на считывающих проводах. Длительность этих импульсов была равна 40 ммксек. и определялась в основном фронтом тока чтения. Обмотки X и Y перпендикулярны и между ними нет прямой магнитной связи. Разрезные медные трубки между магнитными пленками и соленоидами используются как обратные пути для считывающих проводов и одновременно как электростатические экраны. Для использования высокой скорости работы применена специальная линия передачи, имеющая характеристическое сопротивление 200 *ом* и задержку в несколько ммксек. Для обеспечения высокого качества пленок сконструирована аппаратура, позволяющая получать за одно испарение 30 трубок, на каждой из которых нанесено 16 пленок. При конструировании запоминающего устройства были учтены следующие требования: 1) получен большой выходной сигнал благодаря использованию пленок толщиной 5 000—10 000 А, 2) паразитный сигнал с обмотки чтения на считывающий провод много меньше сигнала с пленки, 3) компактность устройства, 4) простота изготовления, 5) время перемагничивания пленки, меньше 0,1 мксек. Цилиндрические пленки являются замкнутыми магнитными системами и поэтому позволяют большие допуски по размерам, чем плоские пленки. Выходной сигнал зависит не от диаметра трубки, а только от сечения и длины пленки, поэтому теоретически диаметр пленки можно уменьшить до размеров, сравнимых с толщиной пленки, и соответственно снизить ток вдоль от пленки, а также габариты устройства. О. В. Бачин

7 В344. Расчет и анализ передающих цепей многодырочных элементов. Bennion D. R., Crane H. D. Design and analysis of MAD transfer circuitry. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959». New York, 1959, 21—36 (англ.)

Приводится подробный теоретический анализ цепей связи чистоферритного логического элемента, представляющего собой магнитный сердечник с одним большим центральным отверстием и двумя малыми отверстиями, из которых одно является входным, а другое выходным. Из этих элементов предлагается строить двухтактные логические схемы, содержащие 2 элемента на двоичный разряд. Выходная обмотка каждого элемента связывается с входной следующего, образуя цепь решетки сдвига, а тактовые импульсы подаются через обмотки, проходящие через большие отверстия элементов. Выводятся формулы для расчета витковых данных обмоток и величин тактовых токов. Описанные схемы могут работать на тактовых частотах до 1 *мгц*. О. В. Бачин

7 В345. Новые схемы запоминающих устройств с использованием трехкоординатных магнитных элементов. Vacca Roberto. Nouvi sistemi di memoria basati sulla magnetizzazione di elementi tridimensionali. «Ricerca scient.», 1960, **30**, № 4, 445—569 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Обзорная статья, посвященная последним разработкам и схемам использования магнитных элементов из ферритовых материалов с прямоугольной петлей гистерезиса. Для обычных ферритовых сердечников (тип RCA XF 3018H) рассматриваются характеристики зависимостей времени перемагничивания и амплитуды выходного сигнала от длительности тока записи при различных амплитудах последнего. Рассмотрение ведется в режиме, соответствующем работе в матрице запоминающего устройства с линейным выбором; токи считывания и разрушения имеют при этом постоянную амплитуду и длительность. Характеристики позволяют выбрать оптимальный режим работы сердечников с точки зрения максимального быстродействия и достаточной надежности. В настоящее время в Массачусетском технологическом Институте на сердечниках RCA XF 3018H построено запоминающее устройство с программной выборкой емкостью 1040 80-разрядных чисел на полный цикл обращения 1 мксек. Выборка каждого числа производится формирователями тока на 4-слойных полупроводниковых диодах *p-n-p-n*. Крутизна фронтов формируемых токов 10^9 *а/сек*. Сообщается о разработке запоминающего устройства с произвольной выборкой на полный цикл обращения 500 ммксек. Описывается схема матрицы запоминающего устройства с прямой выборкой с применением управляющих координатных диодов. Рассмотрен также принцип работы магнитного элемента, использующего взаимодействие двух взаимно-перпендикулярных полей—биакса (biax). А. А. Крупский

7 В346. Счетчики с постоянным весом и дешифраторы. Kautz William H. Constant-weight counters and decoding trees. «IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 2, 231—244 (англ.)

Описан класс счетчиков, представляющих собой кольцевые сдвигающие регистры, в которых содержится двоичное число, имеющее единицы в двух или большем числе разрядов. Число единиц в этих счетчиках остается постоянным при переходе счетчика из одного состояния

в другое. Приведены схемы для реализации таких счетчиков с особым типом дешифратора. Дешифратор обеспечивает отдельный выход для каждого состояния счетчика. Подняты и частично рассмотрены некоторые теоретические вопросы, касающиеся минимизации этих дешифраторов. Даны рекомендации по использованию счетчиков и дешифраторов в качестве счетчиков и дешифраторов адреса запоминающих устройств. В заключение приведено сравнение счетчиков с различным числом разрядов и различным числом циркулирующих единиц по количеству расходуемого оборудования.

И. А. Петухов

7 В347. Криотроны и другие быстродействующие сверхпроводящие вычислительные устройства. Lock J. M. Cryotrons and other high- speed superconducting computer devices. «Advancement Sci.», 1960, **17**, № 66, 121—127 (англ.)

Информация в цифровых вычислительных машинах представлена в двоичной форме, что позволяет использовать для построения машин устройства, имеющие два стабильных состояния. Эти два состояния должны быть хорошо отделены друг от друга, и переключение из одного состояния в другое должно происходить достаточно быстро. Примером такого устройства является криотрон, изобретенный в 1956 г. Известно, что в металлах при температурах, близких к абсолютному нулю, электрическое сопротивление падает до очень низких значений. При приложении определенного магнитного поля к такому охлажденному проводнику или при протекании через этот проводник определенного тока, создающего это магнитное поле, оказывается возможным восстановить сопротивление проводника. Таким образом, электрическое сопротивление сверхпроводника оказывается нелинейной функцией или приложенного магнитного поля, или тока через проводник, при этом сопротивление остается малым до некоторой критической точки поля или тока, что позволяет иметь бистабильное сверхпроводящее устройство. Криотрон представляет собой сверхпроводящую танталовую проволоку (критическая температура 4,4°К), сопротивление которой управляется магнитным полем катушки, намотанной вокруг проволоки, выполненной, например, из сверхпроводящей ниобиевой проволоки, имеющей более высокую критическую температуру (8°К). Длина криотрона составляет 25,4 *мм*, диаметр 0,2 *мм*. Критическое поле при работе в атмосфере жидкого гелия (около 4,2°К) примерно 40 гауссов, а управляющий ток катушки управления, необходимый для восстановления нормального сопротивления (около 0,01 *ом*), имеет порядок 300 *ма*. Управляющая обмотка остается сверхпроводящей даже при более высоких значениях управляющего тока, так что ее сопротивление равно нулю при всех нормальных условиях работы. Существенным моментом является то, что клапанируемый ток одного криотрона может использоваться для управления другим криотроном. Коэффициент усиления криотрона имеет порядок 7. На четырех криотронах можно таким образом построить триггерную ячейку с возможностью записи и считывания информации. Постоянная времени переключения криотрона составляет обычно около 150 мксек. Вследствие теплового действия тока проволочного криотрона, максимальная частота его работы ограничена 1000 *гц*. Частоту работы можно повысить, применяя ленточный криотрон, разработанный фирмой ИБМ и состоящий из двух взаимно-перпендикулярных тонких сверхпроводящих пленок. Такой криотрон имеет быстродействие порядка нескольких мегагерц. Криотрон является активным логическим элементом. В качестве примера пассивного сверхпроводящего элемента можно привести элемент, изобретенный в 1957 г. Кровом. Этот элемент состоит из тонкой пленки (полученной методом осаждения в вакууме) на слюдяной основе. Два состояния пленки образуются различными направлениями токов, текущих через пленку и устанавливаемых управляющими импульсами тока, имеющими противоположное направление. Для тока управления и тока считывания предусматриваются специальные соответствующие сверхпроводящие пленки. Частота работы такого элемента ограничена как индуктивностью пленок, так и выделением тепла, и составляет 20 *мгц*.

Г. Х. Новик

7 В348. Быстродействующий полупроводниковый переключатель и триггер для электронных счетных машин. Бапат Я. Н., Каганов И. Л. «Электричество», 1960, № 6, 76—81

Проведен анализ работы и дан метод расчета переключателя и триггера на двух полупроводниковых триодах, имеющих общие эмиттерные цепи и работающих в ненасыщенном режиме, благодаря чему возможно получить высокую скорость переключений. Результаты исследований стационарных режимов переключения показывают высокое быстродействие схемы. Построенный на основе описанной схемы триггер может работать на частотах свыше 10 *мгц*. Схема мало критична к разбросу характеристик триодов и к другим параметрам.

О. В. Бачин

7 В349. ACRE — цифровая вычислительная машина для системы контроля снаряда. Tanaka Richard I. The ACRE computer — a digital computer for a missile checkout system. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959». New York, 1959, 217—221 (англ.)

Успешная работа сложного управляемого снаряда в значительной степени зависит от вспомогательной системы контроля, способной быстро и наиболее полно проверить правильность работы отдельных узлов снаряда. В статье описывается цифровая вычислительная машина, используемая в качестве основного устройства, управляющего автоматической системой контроля ACRE (for Automatik Checkout and Readiness Equipment). Система выполняет следующие функции: 1) сигнализирует о возникновении опасных режимов работы, 2) проводит детальный контроль вновь изготовленной снарядной системы с целью выяснения способности к работе или причины выхода из строя, 3) периодически проверяет тактическую готовность снаряда к запуску, 4) производит измерения, предшествующие запуску. Разбирается ряд преимуществ, получаемых подобной системой при использовании цифровой машины. Машина может работать в лабораторных и боевых условиях. Машина надежна, удобна в эксплуатации, и логика работы системы сводит к минимуму работу оператора. Конструкция машины выполнена в виде «книги», состоящей из двух «страниц». «Страница» состоит из горизонтальных шасси, в каждое из которых вдвигается 25 печатных плат размером 6×6 дюймов. На платах располагаются триггеры или диодные логические схемы. Машина содержит 40 триггеров. Рабочая частота 100 *кгц*. Размеры машины 20×20×56 дюймов. Запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане емкостью 3904 слова по 24 двоичных разряда и состоит из 60 каналов по 64 слова и 4 быстродействующих каналов по 16 слов в каждом. Имеется канал на 64 слова, связанный с выходным устройством на магнитной ленте. В машине используются 6 регистров по 24 разряда. Система команд одноадресная. 5 разрядов команды занимает код операции, 12— адрес, 4 признаковых разряда используются для контроля правильности передачи информации, модификации адресов, признака интервала и признака передачи информаций на регистрирующее устройство. По существу ACRE является универсальной цифровой вычислительной машиной. В ней используется 25 команд. Дается подробное описание режимов работы. Ввод информации в барабан осуществляется с устройства ввода, использующего семидорожечную бумажную перфоленту. В боевых условиях устройство ввода после записи в память программы и ее проверки отсоединяется. Выходное устройство работает на магнитной ленте шириной

1 дюйм, наматываемой на катушки диаметром 8 дюймов. На одной катушке записывается 5 млн. слов по 24 двоичных разряда. Числа на панель индикации выводятся десятичными цифрами, команды — восьмеричными. Для оповещения о сбое машины применена звуковая сигнализация. Н. В. Петрова

7 В350. Решение уравнений преобразования углов Эйлера. Grado Gilbert R. A solution to the Euler angle transformation equations. «IRE Trans. Electronic Comput.», 1960, **9**, № 3, 362—369 (англ.)

Описывается вычислительное устройство, специально созданное для решения уравнений, которые имеют место при повороте систем координат на плоскости или в пространстве (например, при моделировании полета самолета или снаряда в трехмерном пространстве). Вычислительное устройство представляет собой автономный блок, который может сочленяться с другой вычислительной машиной, использующей вычисленные им сигналы. В описываемом устройстве решаются 3 основные задачи: а) интегрированием производных получаются 3 угла Эйлера и вычисляются их синусы и косинусы, б) вычисляются 9 направляющих косинусов из функций ранее вычисленных углов Эйлера, в) производится умножение трех взаимно ортогональных векторов (например, проекций вектора воздушной скорости на связанные оси) на 9 направляющих косинусов. Углы Эйлера могут задаваться в различной комбинации последовательности поворота, всего может быть 6 таких комбинаций. Вводимые для вычисления углов угловые скорости могут иметь различный масштаб, который может регулироваться в широком диапазоне. При необходимости вместо углов, вычисляемых интегрированием производных, могут вводиться вручную фиксированные величины углов. В состав оборудования вычислительного устройства входят 14 двойных электронных блоков перемножения, 8 счетверенных усилителей, 3 синусно-косинусные генерирующие цепочки и источник питания. Указывается, что за счет описанного устройства сокращается время программирования и набора задач, встречающихся при моделировании полета управляемых снарядов. А. И. Алимов

7 В351. Цифро-аналоговая вычислительная машина для решения линейных систем уравнений и связанных с ними задач. Krishnamurthy E. V. Digito-analogue computer for solving linear simultaneous equations and related problems. «J. Scient. Instrum.», 1960, **37**, № 11, 419—429 (англ.)

Описывается цифро-аналоговая вычислительная машина «Lilavati model III», разработанная в Мадрасском университете (Индия). Машина предназначена для решения шести совместных и секулярных уравнений при помощи разнообразных способов итерации. В отличие от других машин, предназначенных для решения этих же задач, описываемая машина производит умножение при помощи электрических цепочек, основанных на законе Ома, а суммирование производит путем сложения напряжений на последовательно соединенных сопротивлениях. Машина имеет номинальную точность вычислений 0,1%. Рассматриваются процессы итерации и основные схемы машины (схемы умножения и суммирования, мост Kelvin—Varley и селекторные переключатели). Машина собрана в одном блоке, на верхней крышке которого установлены 6 рядов потенциометров и переключателей, при помощи которых устанавливаются коэффициенты уравнений и их знаки. На передней стенке расположены потенциометры регулировки силы тока, переключатели знаков и масштабов, сигнальные лампы, селекторные переключатели и гальванометр. В качестве источников питания для всех цепочек, представляющих 6 колонок матрицы, используются батарейки от карманных фонариков с напряжением 4,5 *в*, а для седьмой колонки используется аккумуляторная батарея. Сообщается о том, что ведутся работы по созданию следующей модели машины (модель IV), которая будет работать автоматизированно и сможет решать 12 линейных уравнений. И. Д. Алимов

7 В352. Аналоговые и цифровые вычислительные устройства используются в одном комплексе. Thompson G. V. E. Analogue, digital computers wedded. «Missiles and Rockets», 1959, **5**, № 47, 30 (англ.)

При экспериментах по моделированию характеристик управляемых снарядов в «Royal Radar Establishment» (Англия) было обнаружено, что целесообразно автоматизировать ввод различных вариантов повторяющихся решений, чтобы более эффективно использовать рабочее время операторов. Это особенно требуется во время сбора статистического материала о работе оборудования снаряда в условиях помех. Для этого аналоговая вычислительная машина была приспособлена к управлению по командам, считываемым с бумажной перфоленты, имеющей 5 рядов перфорации. Полученные при моделировании результаты перфорируются на ленту и вводятся в цифровую машину, которая обработанные сведения печатает в виде таблиц или при необходимости выдает в виде таблиц. Приводятся некоторые технические характеристики устройств комплекса. И. Д. Алимов

7 В353. Двухканальное устройство обмена данными для комбинированной аналого-цифровой системы. Greenstein J. A 2-channel data link for combined analog-digital simulation. «Commun. and Electron.», 1960, № 47, 40—44 (англ.)

При исследовании летных качеств межконтинентальной баллистической ракеты «Атлас» фирма «Convair» использовала специальную быстродействующую 25-канальную систему для связи аналоговой вычислительной машины, содержащей 550 операционных усилителей, с цифровой машиной ERA-1103 (Юниван Сайнтифик) фирмы «Sperry Rand». В 1957 г. была сконструирована более простая 2-канальная схема связи. В статье обсуждаются те характеристики аналоговых и цифровых вычислительных машин, которые обусловливают выгоду комбинирования их; показываются функции системы связи в аналого-цифровом моделировании в масштабе истинного времени и указываются некоторые дополнительные преимущества комбинирования аналоговых и цифровых вычислительных машин. Описанная система связи оперирует с 11-разрядными двоичными числами и непрерывно меняющимися напряжениями в диапазоне от —99,99 до +99,99 *в*. Точность преобразования из непрерывной формы в дискретную и наоборот около 0,1%. Преобразование напряжения в цифровой код производится путем сравнения его с напряжением от матричной схемы сопротивлений с 11 переключателями тока. Каждое сравнение требует 2 мксек, и так как замыкание переключателей производится последовательно, все преобразование требует 22 мксек. Обратное преобразование производится путем параллельной установки всех переключателей и занимает 2 мксек. Получаемое напряжение имеет ступенчатую форму. Рассматривается пример применения аналого-цифровой системы при моделировании наведения управляемого снаряда на маневрирующую цель. О. В. Бачин

7 В354. Организация оборудования передачи данных для системы «Fieldata». Luebbert W. F. Data transmission equipment concepts for FIELDATA. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959». New York, 1959, 189—196 (англ.)

«Fieldata» — это сложная система оборудования для обработки передачи данных, разработанная для армии США. Основным свойством системы является почти полное исчезновение разделения между обработкой данных и их передачей. В качестве входных величин используются как цифровые коды, так и напряжения, уровни сопротивлений, частоты сигналов и т. д. Точно так же и выходные данные могут быть в виде кодов, печатных документов, графиков, фазово-модулированных радиосигналов и т. д. Внутри системы информация передается в буквенно-числовом 6-разрядном коде. К концу 1960 г. основны-

ми компонентами системы «Fieldata» были вычислительные машины «Мобидик» фирмы «Sylvania», «Басикпак» и «Лоджикпак» фирмы «Philco», системы передачи данных АН/ТСКУ-35 фирмы «Bendix-Pacific», работающая со скоростью 19200 разрядов в 1 сек., АН/ТСКУ-33 фирмы «Collins» со скоростью работы 2400 разрядов в 1 сек., АН/ТСКУ-32 фирмы «Stelma» со скоростью работы 1200 разрядов в 1 сек., координатор данных фирмы «ИБМ», облегчающий координации и управление для сложных систем обработки и передачи данных, а также многочисленное вспомогательное оборудование. В приложениях приводится буквенный и контрольный код, используемые в системе «Fieldata». О. В. Бачин

7 В355. Цифровая система отсчета времени для корреляции данных. Digital timing system for data correlation. «Automat. Control», 1960, **12**, № 2, 58—60 (англ.)

Сообщается об использовании американскими ВВС компактной легкой цифровой самолетной системы отсчета времени для корреляции данных. Система разрабатывалась фирмой «Темко» (Temco Aircraft Corp.) и отвечает требованиям, предъявляемым к военной аппаратуре. Система обеспечивает визуальную индикацию на 6-значных цифровых часах, а также вырабатывает видеосигналы, представленные в виде двоично-кодированного десятичного кода, для звуковой и графической записи. Устройство запускается или вручную в любой момент времени, или автоматически, синхронизируясь принятыми радиосигналами радиостанций Национального бюро стандартов США, причем в этом случае автоматически вносится поправка на время распространения радиоволн. Вес аппаратуры с одними часами и одним устройством управления считыванием 31 *кг*. Система производит дешифрирование и считывание двоичного кода, вырабатывает секундные метки и 0,1-, 1-, 10- и 100-мсек. маркеры. В состав системы входят: дешифратор и считывающее устройство, часы, соединительный блок, управление считыванием и блок питания. Дешифратор выполнен полностью на транзисторах, смонтированных в модулях с печатным монтажом. В состав миниатюрных часов входят 6 цифровых индикаторных трубок «никси» (nixie), на которых можно визуально прочитать время. В блоке питания используются кремниевые полупроводниковые приборы и танталовые электролитические конденсаторы, что обеспечивает нормальную работу в диапазоне температур от —55° до +71°С. Для предохранения питающей цепи при перегрузках предусмотрены магнитный и транзисторный регуляторы. Г. И. Гришаков

7 В356. Параллельное аналоговое читающее устройство. Taylor W. K. A parallel analogue reading machine. «Control», 1960, **3**, № 25, 95—99 (англ.)

Описывается устройство для чтения печатного или рукописного текста. Считываемое изображение помещается перед матрицей из 10×10 фотоумножителей. От матрицы исходит 100 шин, несущих информацию об изображении в виде аналоговых сигналов с фотоумножителей. Каждой букве в устройстве соответствует набор делителей на сопротивлениях. Каждый делитель в наборе служит для запоминания одного из возможных вариантов распознаваемой буквы, таким образом для 26 букв английского алфавита имеется 26 наборов по 100 делителей в каждом. При опознавании какого-либо знака наибольший сигнал снимается с того делителя, который больше всего соответствует данному варианту буквы, при этом выходы остальных делителей, с которых снимаются сигналы меньшей амплитуды, блокируются. Выход устройства включает систему из 26 триггеров соответственно буквам алфавита. При детектировании сигнала максимальной амплитуды одним из делителей в некотором наборе срабатывает триггер, соответствующий этому набору. Делители изготавливаются следующим методом: на карты стандартного размера печатным способом наносятся 100 сопротивлений, соответственно 100 выходам матрицы; перфорацией отдельных сопротивлений образуется необходимый вариант делителя, для чего используется вычислительная машина и перфоратор. Когда оператор демонстрирует отдельные варианты буквы, информация об изображениях после аналого-цифрового преобразования вводится в машину. Несложная программа позволяет машине управлять перфоратором для выбора нужного варианта делителя. Затем готовая карта вкладывается в устройство. Устройство читает знаки в независимости от яркости фона как черные на белом фоне, так и белые на черном. Это достигается введением отрицательных обратных связей в фотоумножителе и установлением отрицательных обратных связей с соседними входными каналами. В качестве входного устройства может использоваться один фотоумножитель со сканирующим барабаном. Система позволяет достичь минимальной стоимости на распознаваемый знак по сравнению с другими системами для чтения и может быть применена к широкому классу задач по распознаванию изображений, причем скорость распознавания отдельных образов может достигать 1 мксек. И. Ф. Колпаков

7 В357. Некоторые замечания об игре в шашки, в которую можно играть с помощью цифровой вычислительной машины. Findler N. V. Some remarks on the game «dama» which can be played on a digital computer. «Comput. J.», 1960, **3**, № 1, 40—44 (англ.)

Описываются принципы, положенные в основу программы игры в шашки, составленной для вычислительной машины SILLIAC (время сложения 75 мксек., время умножения 700 мксек., электростатическое запоминающее устройство на 1024 40-значных числа). Анализируемая игра отличается от распространенной в СССР игры в шашки, но весьма близка к так называемой игре в «уголки». Используется обычная 64-клеточная (8×8) доска. Шашки ставятся только на белые поля. Партнеры имеют по 8 шашек и делают ходы по очереди. В начале партии шашки первого партнера занимают 1—2-й ряды, второго — 7—8-й ряды. Шашки могут передвигаться вперед по диагонали на одно поле или на 2, 4, 6 полей (при «перепрыгивании» через свои или чужие шашки). Игра ведется без «взятия» шашек. Выигрывает партнер, первый переместивший все 8 своих шашек на поля, занимаемые в начале партии шашками «противника». Если один из партнеров окажется в положении, при котором у него нет хода, то считается, что он выиграл. Несмотря на простоту игры, ее анализ достаточно сложен, так как имеется очень большое число вариантов. Если партнеры будут передвигать шашки только на одну клетку, то имеется примерно 10^9 вариантов. Если считать перестановку ходов за новый вариант, то нужно это число умножить на 56. Если же учитывать еще ходы с «перепрыгиванием», то число вариантов возрастает еще во много раз. Вообще возможны два метода ведения игры машиной. При первом методе учитывается только позиция, имеющаяся в данный момент на доске, и не принимается во внимание предыдущее протекание партии. Это метод с минимальной информацией о партии. Он сравнительно прост и позволяет машине играть одновременно с несколькими «противниками». При втором методе машина учитывает свои намерения и выявившиеся за время игры замыслы «противника» и «срывает» их. Это более последовательная в стратегическом отношении игра, в то время как первый метод редко применяется при игре людей, кроме случая, когда игрок высокого класса дает сеанс одновременной игры примерно на 50 досках. Описываемая программа, ввиду ограниченности быстродействия и памяти машины, составлена для реализации первого метода. Машина может вести одновременно 25 партий. Для изображения всей позиции на одной доске достаточно двух машинных чисел. Программа игры позволяет оценивать настоящую и будущую ситуацию на 2—3 хода вперед. В программе приняты специальные меры для предотвращения образования «блокированной» позиции, из которой нет хода. Характер работы машины может

быть различным в начале, середине и конце партии. Для целей демонстрации выбран такой вариант программы, когда машина просматривает два ближайшие хода (2 хода машины и 2 ответа «противника»), причем в начале и конце партии анализируются только ходы с «перепрыгиванием», а в середине игры исследуются все возможные варианты первого хода машины и «противника» и только варианты с «перепрыгиванием» для второго хода. При этом машина тратит на «обдумывание» одного хода 10—150 сек., хотя в большинстве случаев эти ходы не лучше ходов среднего игрока. Основная стратегия машины является линейной комбинацией шести подстратегий. Одна из этих подстратегий, например, состоит в том, что машина выбирает свой ход так, чтобы через k ходов (k — число ходов, на которое машина рассчитывает вперед) получить наибольшее число

$$r = \sum_{i=1}^{8} r_{\text{А}}^{(i)} + \sum_{i=1}^{8} r_{\text{Б}}^{(i)},$$

где $r_{\text{А}}^{(i)}$ или $r_{\text{Б}}^{(i)}$ есть номер ряда, в котором находится i-я шашка игрока А (машина) или Б, причем первым рядом считается крайний ряд со стороны игрока А. Другая подстратегия состоит в выборе наилучшего значения другого коэффициента, который также в очках оценивает положения шашек машины с точки зрения того, насколько эти шашки мешают совершать «перепрыгивания» шашкам «противника». Третья подстратегия состоит в выборе третьего числа (коэффициента), оценивающего возможные ходы машины с точки зрения удаления шашек от боковых краев доски, так как положение шашки у края (кроме случаев, когда шашка уже достигла последних рядов) уменьшает ее шансы на хороший ход и т. д. Таким образом, основная стратегия машины состоит в том, что она должна выбирать такой ход, после которого получится наибольшее возможное значение числа, являющегося линейной комбинацией шести других чисел, каждое из которых является результатом оценки позиции с той или иной точки зрения. В заключение статьи обсуждается возможность самообучения машины, т. е. отыскания оптимального варианта основной стратегии. Процесс оптимизации состоит в анализе тех или иных наборов шести постоянных весовых коэффициентов, с которыми коэффициенты подстратегий входят в линейную комбинацию, образующую коэффициент основной стратегии. Машина может, используя метод поиска, сравнивать различные наборы весовых коэффициентов и в конце концов выбирать тот набор, который дает наилучший эффект. В. А. Брик

7 В358. Обучающаяся программа-компилятор. Arnold Richard F. A compiler capable of learning. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959». New York, 1959, 137—143 (англ.)

Утверждается, что интерпретирующие программы гибки в отношении интерпретируемых ими языков и сравнительно просты для записи. Их недостатком является длительность времени, затрачиваемого на расшифровку программы. Компилирующие программы экономнее в отношении затрачиваемого времени, но значительно сложнее для записи. В статье дается новый подход к проблеме автоматизации программирования, который на данном этапе, очевидно, не даст положительных результатов, но обещает хорошие результаты в будущем. Предлагаемая схема — программа, записанная либо в виде псевдокода программы-компилятора, либо в виде другого машинного языка, составляет программу для данной конкретной машины. Составляющая программа должна полностью использовать характерные особенности машины. Приспособление к другой машине должно происходить без особых затруднений. И, так как, собственно, неизвестно, как наилучшим образом составлять программу, составляющая программа должна сама найти оптимальные способы составления программы для данной машины. Предлагаемая программа-компилятор переводит программы с языка A на язык B. Сначала она случайным образом строит программу на языке B. Затем переходит к определению того, будет ли эта кандидат-программа эквивалентна данной программе на языке A. Для этого требуется наличие двух интерпретирующих программ. Если выясняется, что составленная программа не эквивалентна, то составляют новую программу, и т. д. Далее приводятся рекомендации по составлению программы на языке A. Вводится «критерий приемлемости», позволяющий устанавливать эквивалентность программ по частям. Указывается, что опыт составления программы с языка некоторой воображаемой одноадресной машины еще не дал конкретных результатов, но полученные на сегодняшний день результаты поучительны и ободряющие. Н. Н. Поснов

7 В359. Составление программ обучения для цифровой вычислительной машины. Oettinger Anthony G. Programming a digital computer to learn. «Methodos», 1959, **11**, № 41, 55—79 (англ.)

Рассматриваются два примера составления программы обучения для электронной вычислительной машины ЭДСАК. Первый пример: имеется m магазинов и n товаров. Машина должна определить, в каком магазине m_i можно купить товар n_j. В машину вводится матрица $m \times n$, элемент матрицы a_{ij} равен единице, если в i-ом магазине имеется j-й товар. Затем вводится «вектор-покупки», имеющий единицу на j-ом месте, и машина, перебирая строки матрицы, находит нужный магазин. Полученный результат запоминается, и в следующий раз данный товар n_j находится сразу. Второй пример: на вход машины можно подавать числовые возбудители (1, 2, 3), на выходе произвольным образом могут появляться ответы (1, 2, 3, 4, 5), на каждый ответ должна быть дана реакция: 0 — безразличие; 1, 2, 3, 4— разная степень одобрения; —1, —2, —3, —4— разная степень порицания. В результате соответствующей комбинации реакций можно добиться определенных ответов на соответствующие возбудители. Даны описания алгоритмов указанных процессов обучения. Программы работы машины не приводятся. Н. Н. Поснов

7 В360. Процесс механического доказательства и его осуществление в электронной вычислительной машине. Prawitz Dag, Prawitz Haakan, Voghera Neri. A mechanical proof procedure and its realization in an electronic computer. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, **7**, № 2, 102—128 (англ.)

Указывается, что процесс механического доказательства в математической логике в виде псевдопрограммы был разработан Д. Правицом в 1957 г. Программа для электронной вычислительной машины была составлена Х. Правицом в 1957 г. Эту программу видоизменил и испытал Вогера в 1958 г. В первой части статьи описывается теория метода доказательства. Вводится терминология и перечисляются используемые в процессе доказательства операции и, наконец, дается метод доказательства в виде псевдопрограммы. Во второй части описываются возможности используемой вычислительной машины и дается описание программы работы машины. В третьей части приводятся примеры доказанных теорем. Н. Н. Поснов

7 В361. Имитация естественного автомата. Braitenberg Valentino. L'imitazione degli automi naturali. «Methodos», 1959, **11**, № 41, 3—11 (итал.), 12—17 (англ.)

Приводятся общие рассуждения о трех мыслимых «машинах», имитирующих нервную систему организмов. Эти «машины» иллюстрируют три различных подхода к вопросу воспроизведения нервной системы. Указывается, что описываемые «машины» не могут быть технически реализованы.

1) Дарвинская машина конструируется из органов чувств, моторных органов, классификационных и де-

классификационных органов. Машина получает характер, определяемый таблицей различных реакций на различные стимулы. В целях естественного отбора используются копирующие машины.

2) Переводящая машина состоит из одинаковых частей, назовем их R и L, которые связываются с центральной частью. Различают две фазы в жизни машины: несовершеннолетие и рабочая. В период несовершеннолетия задача машины состоит в установлении связей между фразами на языках L и R на базе их совпадения. В период рабочей фазы машина используется как переводчик, сопоставляя заданной фразе на одном из языков L или R фразу на другом. Практически невозможно установить соответствия между всеми фразами языков. Если потребуется перевести фразу, которая ранее не обрабатывалась машиной, то ее перевод будет осуществлен на основе частичных совпадений с уже знакомыми фразами. Это выполняет ассоциативный орган.

3) Машина «Фрейда» — машина ограниченного числа промежуточных состояний, которые зависят от конструкции органов чувств и моторных органов. При данном состоянии S выбор следующего состояния определяется: 1) совместимостью со входом, 2) частотой перехода $S \to S'$ в прошлом, 3) структурой машины, 4) преимуществами, которые дает переход $S \to S'$. Н. Н. Поснов

7 В362. Распознавание рукописных знаков. Neisser Ulrich, Weene Paul. A note on human recognition of hand-printed characters. «Inform. and Control.», 1960, **3**, № 2, 191—196 (англ.)

В статье описан опыт, проведенный с целью определения процента ошибок при распознавании человеком рукописных знаков. Необходимость в таком эксперименте появилась при постановке требований к устройству, предназначенному для механического чтения рукописного текста. Предполагалось, что такое устройство должно читать изолированные знаки, так как использование контекста влечет за собой большие трудности. Опыт состоял в следующем. Каждому из девяти студентов или аспирантов был выдан для распознавания комплект изолированных букв латинского алфавита и цифр от 0 до 9, написанных двадцатью различными почерками. Результаты распознавания были сведены в таблицу. Количество правильно определенных знаков отдельными участниками опыта колебалось от 94,9% до 96,5% от общего количества знаков. Причем, даже при исключении ошибок, допущенных только отдельными участниками опыта, точность не превышала 96,8%. Большинство ошибок приходилось на знаки, одинаковые или сходные по написанию. Например, такие как 0 (цифра) и O (буква) или 1 и I. В статье указывается, что полученные данные могут служить критерием при постановке требований к устройству, предназначенному для механического чтения рукописного текста. И. А. Петухов

7 В363. Системы распознавания рисунков и фигур обработкой изображения при помощи сетей, построенных на элементах, подобных нейронам. Kamentsky L. A. Pattern and character recognition systems - picture processing by nets of neuron—like elements. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San Francisco, Calif., 1959». New York, 1959, 304—309 (англ.)

Проблема распознавания рисунка заключается в сопоставлении опознаваемой структуре определенного кода в некоторой системе сигналов. Сигналы являются результатом преобразования визуального поля картины в его электрическое представление. Точки картины представляются электрическими сигналами двух уровней. Общее содержание информации поля сигналов заведомо меньше, чем первоначальной картины. Машина для опознавания картины производит преобразование (с потерей информации) и дает на выходе код, поставленный в соответствие рисунку. Возможно преобразование в несколько этапов. Преобразование поля сигналов можно осуществить схемой, построенной на элементах с пороговой характеристикой. Эти элементы названы подобными нейронам, так как они имеют много входов и один выход типа «все или ничего». Другое название элемента—спейрон. Спейроны полезны для выполнения многих операций с потерей информации. В построенной упрощенной модели спейронной сети основными физическими элементами являются транзисторы. Обобщенный спейрон N_j может иметь любое число n входов X_{ij}, каждый из которых принимает значение 0, +1 или —1. Значение порога Z (одинаковое для всех элементов) может меняться от 0 до n. Для единственного выхода Y_j спейрона имеет место:

$$Y_j = 1, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geqslant Z,$$

$$Y_j = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} X_{ij} < Z.$$

П. П. Пархоменко

7 В364. Использование вычислительных машин для построения грамматики и составления программ для структурного анализа. Harper K. E., Hays D. G. The use of machines in the construction of a grammar and computer program for structural analysis. «Informat. processing. Paris—München—London», 1960, 188—193. Discuss., 193—194 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Излагаются результаты исследований описательной грамматики русского языка по техническим текстам. Обрабатывалось 250 000 слов для составления классификации, для установления отношений между словами. Совокупность классов слов и функциональных соотношений между ними представляет собой грамматику русских технических текстов. Обработка текстов состоит из четырех этапов: приготовление текстов, составление словаря, перевод, структурный анализ. Указываются проблемы: существование каких классов слов и функциональных соотношений следует признать в русском языке и согласуются ли структуры предложений, определенные машиной, с существующими у лингвистов.

А. А. Красилов

7 В365. Роль военно-воздушных сил США в исследовании и развитии вопросов поиска необходимой информации и машинного перевода. Samson Robert F. The role of USAF research and development in information retrieval and machine translation. «Proc. West. Joint Comput. Conf., San. Francisco, Calif. 1959», New York, 1959, 66—69 (англ.)

Сообщается, что за последние 4 года разведывательная лаборатория римского авиационного центра начала заниматься проблемами обработки информации. В процессе работы было построено фотоскопическое запоминающее устройство на стеклянных дисках, на которые нанесена фотоэмульсия. Емкость этого запоминающего устройства определяется цифрой $3 \cdot 10^6$ знаков на квадратный дюйм. Один из разработанных в лаборатории методов поиска нужной информации состоит в исследовании только индексов документов. Для этой цели построены 2 машины: 1) «Magnacard», использующая в качестве запоминающего устройства «карты» из магнитной ленты размерами 1×3 дюйма; 2) «Index Selector», предназначенная для механизации библиотечной работы и использующая в качестве запоминающего устройства магнитную ленту. Второй метод поиска информации заключается в исследовании индекса документа и самого документа, хранимых вместе. При этом используется машина «Minicard». Сообщается, что в лаборатории ведутся большие работы по распознаванию букв английского и русского алфавита для механизации машинного перевода, а также другие работы по машинному переводу.

А. Н. Чуйкин

7 В366. Программирование для цифрового управления. Walter Leo. Programming for numerical control. «Automation», 1959, **6**, № 6, 68—73 (англ.)

Английские фирмы «Ferranti» (Эдинбург) и «British Oxygen Gases» (Лондон) построили автоматический станок для автогенной резки стальных листов с цифровым программным управлением для судостроительной промышленности. Разрезаемый лист покоится на роликовом столе; над столом в продольном направлении перемещается портал, поперек которого движется каретка с горелкой. Управление перемещениями шаговое. Во время резания работа горелки автоматически поддерживается в оптимальном режиме. Горелка снабжена автоматическим зажигающим устройством и фотоэлектрической ячейкой, останавливающей работу станка при погасании пламени. Первый этап программирования заключается в вычерчивании профиля детали и занесении в таблицу координат тех точек, в которых линия контура меняет свое направление, а также центров окружностей и радиусов их кривизны. На втором этапе составляется технологическая карта, где операции, подлежащие выполнению на станке, и указания режима работы обозначаются кодом из трех букв. В состав операций, выполняемых на станке, включены команды пуска и останова, указания координат точек контура, ширины реза, скорости перемещения горелки, необходимость замедления движения в точке излома профиля, введение поправок на ширину реза, обход кругового пути с заданием координат центра, величины радиуса и направления обхода, а также команды управления режимом резания. Затем по составленной технологической карте на перфораторе пробивается бумажная перфолента (пятидорожечная телеграфного типа). При помощи перфоленты программа вводится в цифровую вычислительную машину, которая обрабатывает программу, проводит интерполяцию, вычисляет данные, необходимые для работы станка, и фиксирует их на магнитной ленте. Готовая магнитная лента устанавливается в командном устройстве станка и управляет его работой. Вырезка стрингера — типовой судостроительной детали — при длине реза в 21,6 *м* требует 162 мин. работы, в том числе: 85 мин.— составление технологической карты, 30 мин.— пробивка перфоленты, 3 мин.— счет на вычислительной машине и изготовление магнитной ленты, 44 мин.— станочное время на вырезание. По сравнению с существующим методом — изготовление шаблонов и перенос их на стальной лист — достигается экономический эффект порядка 38%. И. В. Лебедев

7 В367. Селекция и анализ записанных акустических сигналов из морских глубин. Peterson H. L., Finney W. J. Selection and analysis of recorded acoustic data from the sea. «Automat. Control», 1960, **12**, № 1, 48, 50, 52 (англ.)

Описывается оборудование, применявшееся Научно-исследовательской лабораторией ВМФ США (US Naval Research Laboratory) при исследовании звуков, принимаемых акустическими установками из морских глубин. Принятые гидроакустическими установками сигналы выбираются дискретно с частотой 10 *кгц* и преобразуются в цифровую форму (10 значащих разрядов и разряд знака), после чего записываются 16-канальным магнитофоном. Ленты с записью вводятся в устройство для воспроизведения с визуальным просмотром формы сигналов на экране осциллографа. Затем отобранные участки вводятся в цифровую вычислительную машину для анализа (например, вычисления корреляционных функций, распределения амплитуд, разложения в ряд Фурье и др.). Результаты работы машины выдаются для записи на перфоленту или на магнитную ленту, а также могут автоматически вычерчиваться в виде графиков.

И. Д. Алимов

7 В368. Математические методы, применяемые при создании стереофотограмметрических приборов. Helava U. V. Mathematical methods in the design of photogrammetric plotters. «Photogrammetria», 1959—1960, **16**, № 2, 41—56 (англ.; рез. франц., нем.)

Универсальные фотограмметрические приборы работают на принципе восстановления геометрической модели, существовавшей в момент съемки. Таким образом эти приборы можно назвать моделирующими устройствами. В настоящее время в фотограмметрических приборах моделирование осуществляется с помощью оптических и механических средств. Но среди моделирующих устройств наибольшие преимущества имеют электронные устройства, которые и должны найти широкое применение в фотограмметрических приборах. Электронные моделирующие устройства обладают большим быстродействием, но их точность ограничена разрешающей способностью системы, этот недостаток устранен в цифровых машинах, которые тоже должны найти применение при создании стереоприборов. Цифровые машины, обладая меньшим быстродействием, практически дают неограниченную точность вычислений, и с их помощью легко реализуется метод наименьших квадратов. При внедрении электронной техники в фотограмметрическое приборостроение возникают проблемы ввода и вывода данных, включение следящей системы, включение вычислителя. Ввод информации может осуществляться как в непрерывной форме, так и в цифровой; скажем, механическое движение координатографа представляется в виде напряжения с помощью потенциометра, затем напряжение может быть преобразовано в цифру. Цифровой код может сниматься в виде импульсов непосредственно с микровинтов. Вывод можно осуществить на специальном печатном устройстве в непрерывной форме или цифровой. Электронные средства при этом дают возможность получать план и профиль одновременно. Электронные следящие системы имеют преимущества перед другими, имея меньшие габариты, стоимость и безынерционность. Следящая система должна быть рассчитана для определенных параметров системы и в зависимости от общего назначения прибора. На электронном принципе создано два типа стереофотограмметрических приборов, супераватограф и автоматический картограф. Первый имеет высокой точности оптико-механическую систему и вычислитель, реализующий метод наименьших квадратов. Применяется для основных работ. Второй совмещает в себе стереоавтограф и супераватограф и применим для картографирования. С. З. Ицкович

См. также: 7А31, 7Б312, 7Б317, 7В59, 7В93, 7В168, 7В222Д, 7В231, 7В236, 7В240, 7В274, 7В290

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Перед намерами рефератов опущены номер и индекс 7В выпуска)

А

Абрамов А. А. 254

Б

Бапат Я. Н. 348
Барк Л. С. 299 К
Барретт Д. Ф. 214 К
Барсов А. С. 107 К
Башарин Г. П. 183
Беляев Б. И. 256
Бункин Ф. В. 138
Блэчман Н. М. 215 К

В

Валле Пуссен Ш. Ж. де ля 260
Ван-Валькенбург М. Э. 218 К
Варшавер Б. А. 167
Васильев В. Б. 122
Ватанабэ 76
Вестготт 219 К
Войтишек В. В. 315
Волков И. С. 16

Г

Гаврилюк В. Т. 272
Галясовский И. В. 283
Герценштейн М. Е. 122
Гильман А. М. 316
Гонтковская В. Т. 282
Горьков Л. И. 90
Губский В. Ф. 140

Д

Демков Ю. Н. 307
Дроздов Н. Д. 253
Дьяченко Л. Ф. 252
Дынкин Е. Б. 21, 23

Е

Евсеев А. М. 121
Ершов А. П. 308
Ефимов З. Ф. 232

З

Золотарев В. М. 14

И

Иванов В. А. 24

К

Каганов И. Л. 348
Кантор Б. Я. 229
Канторович Л. В. 90
Карпеев Г. А. 130
Карцев М. А. 329
Кловский Д. Д. 222 Д
Клосс Б. М. 8
Королев Л. Н. 311
Куликов Н. К. 223

Л

Лебедев В. Л. 127, 128
Левин Б. Р. 129, 195
Лившиц Б. Л. 243
Ли Хен Вон 176

М

Мазмишвили А. И. 256
Мартынов И. В. 228
Марьянович Т. П. 187
Маслов М. И. 284
Мельников В. С. 142
Мепуришвили Г. Е. 257
Михайловский В. Н. 169
Мишонов М. 277

Н

Нейгауз М. Г. 306
Неймарк Ю. И. 280
Немцова Л. Г. 289

О

Овсеевич И. А. 134

П

Панова Л. Д. 314
Петров В. В. 10
Пинскер М. С. 134
Прасад Т. 217 К
Просин А. В. 140, 141
Прохоров Ю. В. 9
Пугачев В. С. 210 К, 213 К
Пушной Б. М. 166

Р

Раевский С. Я. 174
Раппопорт М. Г. 274
Ремез Е. Я. 271, 272
Ривкин С. С. 177
Рид И. С. 165
Рихтмайер Р. Д. 292 К
Розенблат-Рот М. 159
Рубинштейн Г. Ш. 68
Руина Д. П. 218 К
Русанов В. В. 227
Рытов С. М. 175

С

Садзи Н. 100
Сазонов А. З. 258
Самойлов А. И. 139
Саникидзе Д. Г. 267
Сарманов О. В. 2
Свешников А. А. 123
Сенюков Р. В. 307
Сифоров В. И. (Ред.) 209 К
Сморкачев Е. Т. 288
Соломин В. И. 230
Солонин И. С. 220 К
Срагович А. И. 313
Срагович В. Г. 143
Страхов В. Н. 285

Т

Такач Л. 189
Тепляков И. М. 133
Тлегенов К. Б. 250
Тодоров М. 241

Ф

Фалетова А. Я. 312
Фалькович С. Е. 144
Фельдбаум А. А. 178, 212 К
Филин А. П. 206

Х

Хохлов Р. В. 174
Хубларова С. А. 254, 255
Хургин Я. И. 161

Ч

Чеботарев А. С. 221 К
Чжан С. С. 211 К

Ш

Шаннон К. Э. 157

Э

Эмара Р. С. 216 К

A

Abramowitz M. 281
Aczél J. 286
Akaike H. 179, 244
Albrecht J. 263
Andrus J. F. 245
Arnold R. F. 358
Ayres R. U. 117

B

Baird H. G. 248
Barlow R. E. 194
Bartee T. C. 325
Barton D. E. 295
Békéssy A. 287
Bellman R. 93
Beneš V. E. 181
Bennett B. M. 41
Bennion D. R. 344
Berkson J. 36
Bertram G. 53
Bhattacharyya A. 42
Blanc-Lapierre A. 25
Blyth C. R. 38
Bod P. 77
Bonney R. B. 305
Bose R. C. 34
Bourret R. 118
Box G. E. P. 110
Braitenberg V. 361
Brillouin L. 119
Brock P. 93
Brown J. L. Jr. 131
Buckingham R. A. 340
Burkhardt F. 105

C

Čajka J. 249
Calabi L. 164
Chamberlin E. 86
Chiang Tse-Pei 52
Chorafas D. N. 109 Д
Clerc D. 310
Cohn S. H. 309

Cornish E. A. 33
Cox D. 35
Crane H. D. 344

D

Dailidė J. 226
Dantzig G. B. 73
David F. N. 295
Debreu G. 5
Deming W. E. 30
Denison S. J. M. 319
Derman C. 51
Dimsdale B. 168
Dore P. 171
Douglas A. S. 321
Douglas J., Jr, 273
Drinick R. F. 149
Dubois P. 151
Durbin J. 27

F

Fabian V. 237, 238
Fano R. M. 148
Fedorova R. M. 291 K
Feinstein A. 156
Feller W. 15
Fettis H. E. 265
Finch P. D. 182
Findler N. V. 357
Finney W. J. 367
Fisher R. A. 33, 62
Flasterstein A. H. 278
Freeman G. H. 47
Freilich A. 330
Frisch R. 106 K
Fröhlich S. 337
Fuchs A. 18

G

Gani J. 191—193
Garner H. L. 300
Geisler M. A. 59
Gelernter H. 303
Gel'fand I. M. 158
Gerberich C. L. 303
Getoor R. K. 22
Ghosh S. P. 28
Ghouila-Houri A. 78, 79
Gibrat R. 74
Giurovich G. 207
Glasser G. J. 30
Goodman L. A. 49
Gordon N. L. 278
Grado G. R. 350
Granholm H. 279
Greenberg B. G. 246
Greenstein J. 353
Gridgeman N. T. 202
Gupta S. S. 34

H

Haefeli H. G. 164
Haertel R. 94
Hájek J. 31
Hale I. 58
Hammerton J. C. 335
Hanania M. I. 203
Hansen J. R. 303
Harary F. 97
Harper K. E. 364
Harsanyi J. C. 57
Harter H. L. 37
Hartmanis J. 332
Hassenstein B. 200
Hays D. G. 364
Heinhold J. 98
Helava U. V. 368
Helstrom C. W. 137
Henn R. 197
Hertz D. B. 103
Higgins S. N. 320
Hinčin A. Y. 154
Hoffman G. R. 343
Hofsommer D. J. 297
Holroyd P. 150
Householder A. S. 242
Houthakker H. S. 82
Howland J. L. 324
Hunter L. C. 194
Hýbl J. 70

I

Ikeda S. 6
Isley C. T. 137
Iwanaga M. 125

J

Jensen A. 190
Jones G. P. 150
Jörgens K. 239

K

Kamentsky L. A. 363
Kämmerer W. 304
Kane R. B. 69
Kato Y. 296
Kautz W. H. 346
Kawaratani T. K. 73
Kendall D. G. 17
Keuls M. 45
Kilburn T. 343
Kimball B. F. 43
Kirkwood J. G. 113
Kitabatake S. 50
Klomp H. 61
Knödel W. 80
Koenigsherg E. 186
Kosten L. 104
Krishnamurthy E. V. 247, 351
Kron G. 231
Kummer H. 234

L

Lebedev A. V. 291 K
Lehman R. S. 124
Leipnik R. 135
Leutert W. W. 96
Levine A. 136
Lévy P. 12
Lichtenberg D. 71
Liguori F. 323
Lindaman R. 333
Liorzou A. 54 K
Lipták T. 39
Lock J. M. 347
Luebbert W. F. 354
Łukaszewicz L. 240

M

McGhee R. B. 136
Machek J. 81
Machol R. E. 55 K
McMillan B. 147
Maehly H. J. 270
Maffei R. B. 92
Maghout K. 65
Magnus K. 224
Malecot G. 205
Malý V. 199
Maravall-Casesnoves D. 91, 120
Marimont R. B. 322
Masuyama M. 293
Matulionis J. 226
Meyer G. 172
Miller J. C. P. 261, 262
Mitchell A. J. 321
Möller W. 338
Moriguti S. 60
Morillon Y. 72
Motoo M. 19, 276
Moyal J. E. 20
Müller P. H. 234
Muroga S. 162
Murthy M. N. 29
Murthy V. K. 40

N

Nakagami M. 112
Nanjamma N. S. 29
Narumi H. 296
Neisser U. 362
Nelson E. 13

O

Odanka T. 83
Oettinger A. G. 359
Ohora R. M. 309
Oleszkiewicz M. 4
Onishi R. 125
Ota M. 112

P

Pajestka J. 88
Patinkin D. 108 K
Pawlak Z. 328
Pearcey T. 320
Perkal J. 46
Peterson H. L. 367
Pickert G. 286
Pietrzykowski T. 66, 235
Pinkerton J. M. M. 339
Potters M. L. 297
Prabbu N. U. 191, 192
Prawitz D. 360
Prawitz H. 360

R

Radó F. 286
Radu N. C. 269
Raison J. 48
Rawdin E. 188
Reed I. S. 146
Rényi A. 7, 155, 196
Rider P. R. 32
Robinson E. A. 87
Robinson C. 318
Rösler H. 331
Ross J. 113
Roy J. 40
Roy S. N. 246

S

Saika A. 296
Saffman P. G. 111
Salzer H. E. 268
Samson R. F. 365
Santacroce G. 206
Sarhan A. E. 246
Schlaepfer F. 225
Schaffir K. H. 103
Schneider E. 85
Schützenberger M.-P. 56
Shakun M. F. 95
Shetty C. M. 64
Simpson J. A. 294
Siforov V. I. 163
Sklansky J. 327
Smillie K. W. 324
Smith C. 201
Spitzer F. 11
Stam A. J. 153
Stancu D. D. 264
Staniland A. 204
Stearman G. H. 152
Stegun I. A. 281
Stengel J. 99
Steyn H. S. 44
Störmer H. 180, 185
Stumpers F. L. H. M. 173
Suganami S. 60
Suzuki T. 208
Swerling P. 145
Szulkin P. 132

T

Taga Y. 208
Tanaka R. I. 349
Taylor W. K. 356
Thompson G. V. E. 352
Tietz W. 170
Tintner G. 102
Tóth K. 287
Turner J. A. 343

U

Uhlhorn U. 114—116
Ullman R. J. 73
Ulmo J. 198

V

Vacca R. 345
Vajani L. 1
Vajda S. 63
Van Dyke M. D. 233
Varberg D. 13
Verhulst M. 84
Vincent S. E. 75
Voghera N. 360
Voorhees A. M. 101

W

Wadey W. G. 301
Wagner H. M. 275
Walter L. 366
Watanabe T. 296
Wayman P. A. 259
Weene P. 362
Weinberg G. M. 168
Weiss G. H. 124
Welch B. L. 294
Wenke K. 89
Whittle P. 3
Winkel H. 67
Wolfowitz J. 160
Woodward P. M. 320

Y

Yaglom A. M. 158
Yamashita H. 236
Yngvell S. 302
Yüh M. I. 184

Z

Zakai M. 126
Zeuli T. 251
Zoroa P. 26
Zweng M. 71

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА — Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ — Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ — Главный редактор канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ — Главный редактор доктор геогр. наук *А. А. Насимович*, ГЕОЛОГИЯ — Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА — Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО — Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА — Главный редактор доктор физ.-мат. наук *Р. В. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ — Главный редактор канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг*, МЕТАЛЛУРГИЯ — Главный редактор член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА — Главный редактор академик *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ — Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА — Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ — Заведующий отделом профессор *В. В. Кафаров*, Главный редактор *В. В. Серпинский*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ — Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА — Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*

СОДЕРЖАНИЕ

СВОДНОГО ТОМА РЖ «МАТЕМАТИКА» № 7 за 1961 г.

7 А. Общие вопросы 7А1
История математики. Персоналии . . . 7А26
Преподавание математики 7А68
Основания математики и математическая логика 7А86
Теория чисел 7А101
Алгебра 7А149
Многочлены и линейная алгебра 7А152
Группы 7А208
Поля, кольца, алгебры и структуры . . 7А257
Алгебраическая теория схем связи и управления 7А303
Топология 7А324
Геометрия 7А403
Приложения геометрии 7А411
Элементарная геометрия 7А414
Аналитическая геометрия 7А428
Проективная и неевклидовы геометрии . 7А441
Начертательная геометрия 7А451
Алгебраическая геометрия 7А461
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 7А465
Геометрия n-мерного пространства . . . 7А484
Теория относительности 7А525
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 7А533
Метрические методы в геометрии . . . 7А541
Выпуклые многообразия 7А546
Авторский указатель
7 Б. Теория функций действительного переменного 7Б1
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 7Б28
Теория функций комплексного переменного 7Б46
Дифференциальные уравнения
Обыкновенные дифференциальные уравнения 7Б146
Уравнения в частных производных . . . 7Б197
Приложения к физике, технике и естественным наукам 7Б239
Интегральные уравнения 7Б287
Вариационное исчисление 7Б298
Анализ (другие вопросы) 7Б332
Числовые ряды 7Б356
Специальные функции 7Б374
Интегральные преобразования и операционное исчисление 7Б379
Приложения общих методов математического анализа 7Б394
Функциональный анализ 7Б400
Авторский указатель
7 В. Теория вероятностей и математическая статистика
Теория вероятностей 7В1
Математическая статистика 7В26
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 7В56
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 7В110
Численные и графические методы 7В223
Таблицы 7В293
Вычислительные машины и математические приборы 7В300
Применение вычислительных машин . . —
Авторский указатель

Цена 38 к.
24 к. для индивидуальных подписчиков

0147/7

П. ящ. 1598
ТЕХ. БИБЛИОТЕКА

1967

ОТКРЫТА ПОДПИСКА на II-ое ПОЛУГОДИЕ 1961 года

НА РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОДПИСЧИКОВ

на сводный том и отдельные выпуски с 1 июля 1961 года

СНИЖЕНА до 50%

Журнал рассчитан на широкий круг математиков и лиц, работающих в смежных с математикой областях науки и техники, и дает по возможности всеобъемлющую информацию об опубликованных в мировой литературе научных работах по всем разделам математики и многим ее приложениям.

Журнал выходит один раз в месяц.

К комплекту сводного тома в виде приложений будут даны годовые указатели: авторский, систематический и предметный.

Журнал издается как в виде сводного тома, так и в виде трех отдельных выпусков.

Подписка не ограничена, принимается с любого очередного номера.

Условия подписки:

СВОДНЫЙ ТОМ с указателями только на 6 м-цев

для организаций	12-72
для индивидуальных подписчиков	8-48

СВОДНЫЙ ТОМ без указателей на 6 м-цев

для организаций	9-24
для индивидуальных подписчиков	6-30

ОТДЕЛЬНЫЕ ВЫПУСКИ на 6 м-цев	Для организаций	Для индивид. подписчиков
I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ЛОГИКА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ	3—60	2—28
II. АНАЛИЗ	4—20	2—64
III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ	2—28	1—44

Подписка принимается в пунктах подписки «Союзпечать», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах и фабриках, шахтах, промыслах и стройках, в учебных заведениях и учреждениях.

Заказы можно направлять также в Отдел подписки и реализации Производственно-издательского комбината ВИНИТИ по адресу:

г. Москва, Люберцы-6, Октябрьский проспект д. 403

Р/сч. 58526 в Люберецком отделении Госбанка г. Москвы